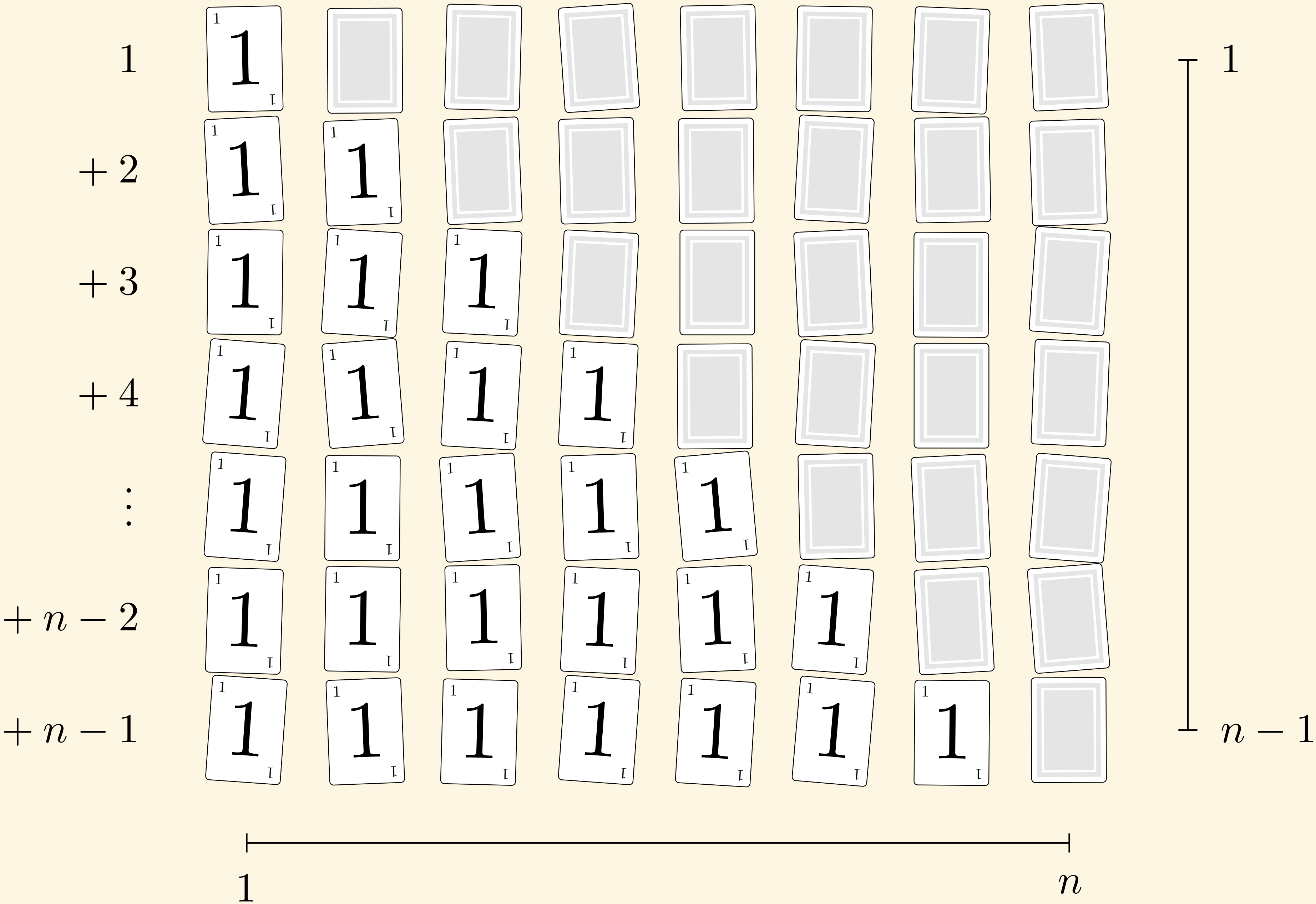
Forelesning 2

Bonusmateriale

Ting som ikke ble med i forelesningen, men som kanskje kan være av interesse

To kritiske summer

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$


1
+ 2
+ 3
+ 4
⋮
+ n − 2
+ n − 1
1
n − 1
1
n

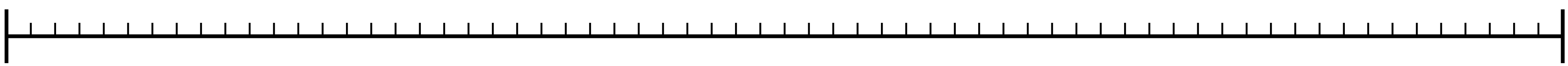
$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

antall × gjennomsnitt av første og siste

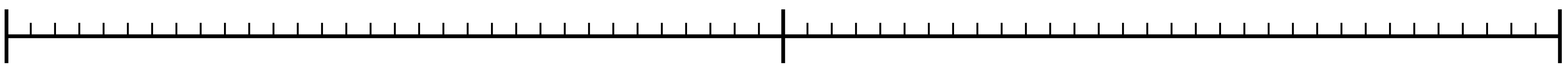
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16$$

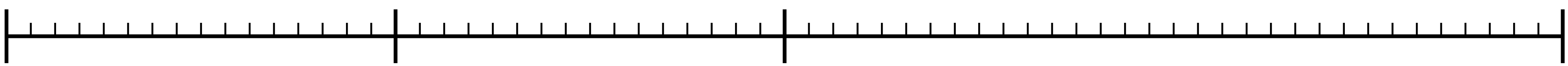
Ett av Xeno sine berømte paradokser: Du kan aldri komme deg fra A til B, fordi først må du komme halvveis, og før det, så må du komme halvveis til halveien, etc.

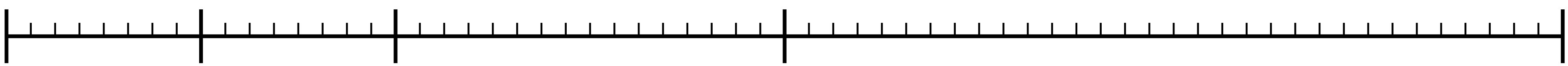


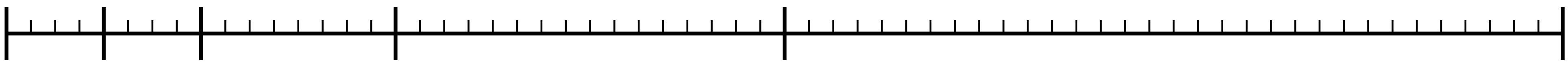
Hvis vi bruker reelle tall og ser på grenseverdien av n/2 + n/4 + n/8 + … så blir jo svaret bare n. Men hva om vi har begrenset oppløsning, og bare kan bruke heltall?

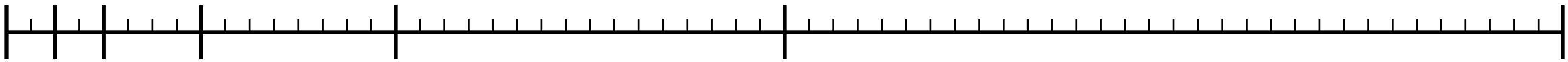
Vi kan anta at n = 2^h for et eller annet ikke-negativt heltall h.

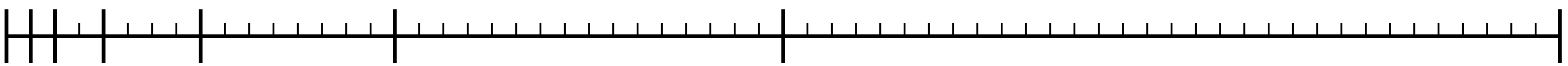


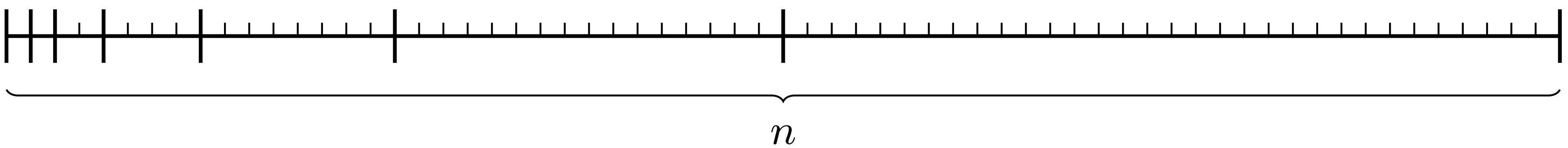




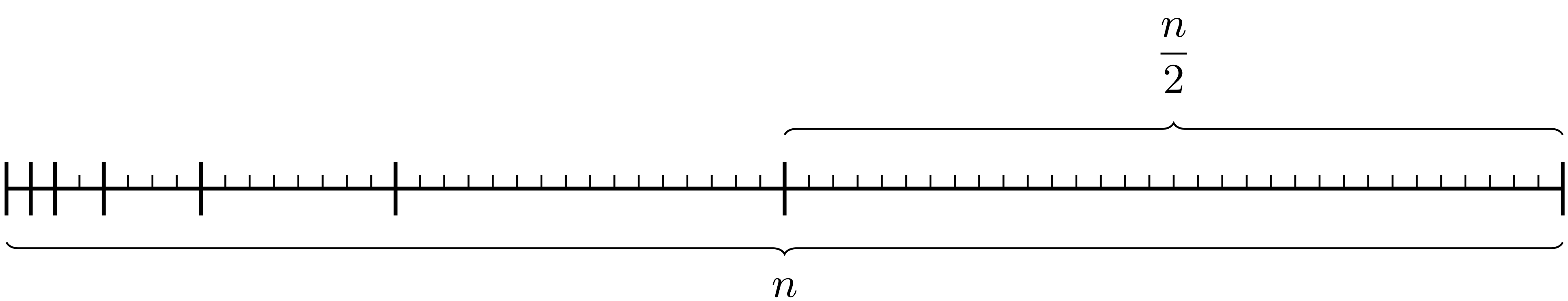


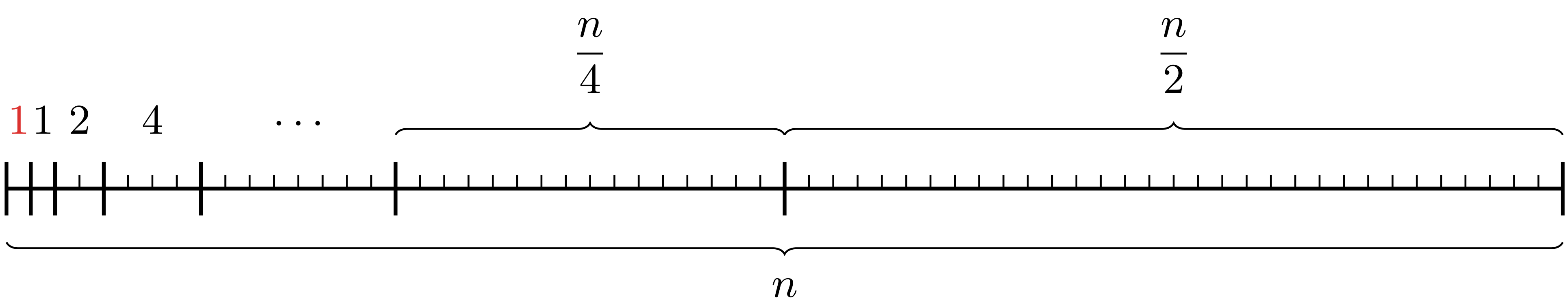


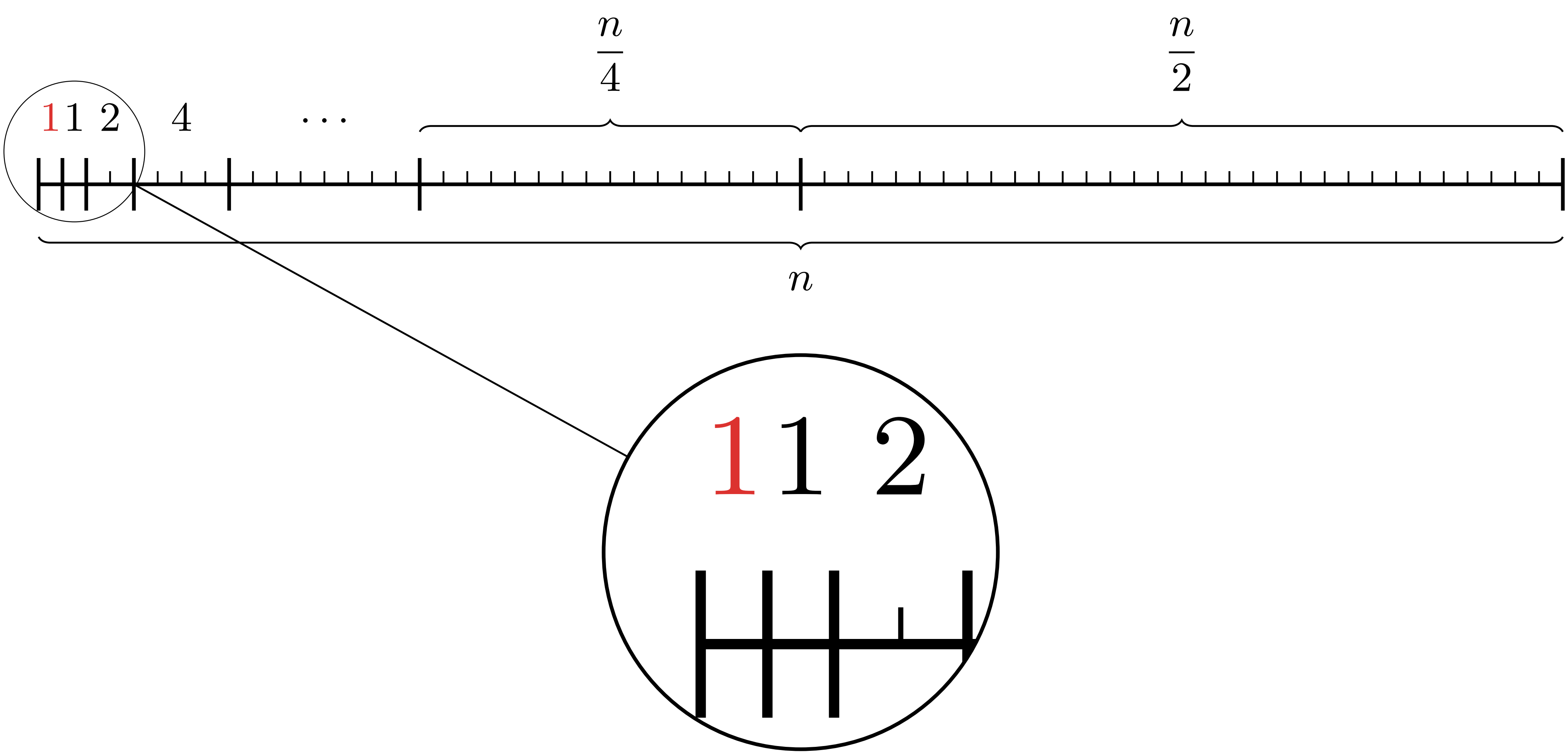




n


$\frac{n}{2}$
n


$\frac{n}{4}$
$\frac{n}{2}$
1 1 2 4 ···
n



1 1 2
4
...
n/4
n/2
n
1 1 2

$$\sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$$

Alternativ huskeregel 1: Utslagsturnering med n deltakere.

I runde 1 trenger du n/2 matcher. I runde 2 trenger du n/4, etc., helt til du til slutt har én match mellom de to siste. Antall matcher er 1 + 2 + 4 + … + n/2.

Og hvor mange matcher er det? I hver match går én deltaker ut av turneringen, helt til du sitter igjen med bare vinneren, som aldri blir slått ut. Altså n – 1 matcher.

Med andre ord: 1 + 2 + 4 + … + n/2 = n–1.

$$\sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$$

Alternativ huskeregel 2: Tenk på et tall i totallssystemet som bare består av ettall. Dvs., 11111111…111. Hvilken verdi har dette tallet?

Vel, hvis det har h siffer, er det summen av de h første toerpotensene, 1 + 2 + 4 + … + 2^(h-1).

Men hva skjer om du legger til 1? Da får du plutselig 100000000…000 – ett siffer ekstra, og tallet er lik neste toerpotens. Så 11111111…111 er én mindre enn neste toerpotens.

Med andre ord: 1 + 2 + 5 + … + 2^(h-1) = 2^h – 1.

$$1+2+4+\cdots+\frac{n}{4}+\frac{n}{2}=n-1$$