Forelesning 4

Bonusmateriale

Ting som ikke ble med i forelesningen, men som kanskje kan være av interesse

Her er det altså snakk om en garanti i verste tilfelle – ikke en forventning.

Gjenta suksessen!

… denne gang for WC

Select

JOURNAL OF COMPUTER AND SYSTEM SCIENCES **7**, 448–461 (1973)

Time Bounds for Selection*

MANUEL BLUM, ROBERT W. FLOYD, VAUGHAN PRATT,
RONALD L. RIVEST, AND ROBERT E. TARJAN

Department of Computer Science, Stanford University, Stanford, California 94305

Received November 14, 1972

The number of comparisons required to select the i-th smallest of n numbers is shown

Trenger god pivot

Bruk … Select?

«Median av medianer»

```
PARTITION(A, p, r)
1  x = A[r]
2  i = p − 1
3  for j = p to r − 1
4          if A[j] ≤ x
5                  i = i + 1
6                  exchange A[i] with A[j]
7  exchange A[i + 1] with A[r]
8  return i + 1
```

Bruker $A[r]$ som pivot

Partition-Around(A, p, r, x)

$i = 1$

while $A[i] \neq x$

    $i = i + 1$

exchange $A[r]$ and $A[i]$

return Partition(A, p, r)

Får pivot oppgitt! Beskrevet uten kode i boka

```
Rand-Sel(A, p, r, i)
if p == r
    return A[p]
q = Rand-Partition(A, p, r)
k = q − p + 1
if i == k
    return A[q]
elseif i < k
    return Rand-Sel(A, p, q − 1, i)
else return Rand-Sel(A, q + 1, r, i − k)
```

La oss bytte ut alle Randomized-tingene

```
SELECT(A, p, r, i)
if p == r
    return A[p]
q = GOOD-PARTITION(A, p, r)
k = q − p + 1
if i == k
    return A[q]
elseif i < k
    return SELECT(A, p, q − 1, i)
else return SELECT(A, p + 1, r, i − k)
```

Partisjoneringen er kjernen: Finn en god pivot!

Good-Partition(A, p, r)

A	tabell
p	venstre
r	høyre

Velger pivot nøye. Beskrevet uten kode i boka

GOOD-PARTITION(A, p, r)
1 $n = r - p + 1$

A	tabell
p	venstre
r	høyre
n	antall

$$n = A[p \,..\, r].\mathit{length}$$

GOOD-PARTITION(A, p, r)
1 $n = r - p + 1$
2 $m = \lceil n/5 \rceil$

A	tabell
p	venstre
r	høyre
n	antall
m	grupper

Vi vil dele A[$p\,..\,r$] i grupper på fem

GOOD-PARTITION(A, p, r)

1 $n = r - p + 1$
2 $m = \lceil n/5 \rceil$
3 create $\mathrm{B}[1 \,..\, m]$

A	tabell
p	venstre
r	høyre
n	antall
m	grupper
B	medianer

Vil inneholde medianen for hver av femmergruppene

Good-Partition(A, p, r)

$n = r - p + 1$
$m = \lceil n/5 \rceil$
create $B[1 \,..\, m]$
for $i = 0$ **to** $m - 1$

A	tabell
p	venstre
r	høyre
n	antall
m	grupper
B	medianer
i	gruppe $- 1$

For hver femmergruppe . . .

Good-Partition(A, p, r)

$n = r - p + 1$

$m = \lceil n/5 \rceil$

create $\mathrm{B}[1 \mathinner{.\,.} m]$

for $i = 0$ **to** $m - 1$

    $q = p + 5i$

A	tabell
p	venstre
r	høyre
n	antall
m	grupper
B	medianer
i	gruppe − 1
q	v., gruppe

Gruppen starter med $\mathrm{A}[q]$

```
GOOD-PARTITION(A, p, r)
n = r − p + 1
m = ⌈n/5⌉
create B[1 . . m]
for i = 0 to m − 1
      q = p + 5i
      sort A[q . . q + 4]
```

A	tabell
p	venstre
r	høyre
n	antall
m	grupper
B	medianer
i	gruppe − 1
q	v., gruppe

For å finne medianen i gruppen. Bruk f.eks. INSERTION-SORT

```
GOOD-PARTITION(A, p, r)
n = r − p + 1
m = ⌈n/5⌉
create B[1 . . m]
for i = 0 to m − 1
    q = p + 5i
    sort A[q . . q + 4]
    B[i] = A[q + 2]
```

A	tabell
p	venstre
r	høyre
n	antall
m	grupper
B	medianer
i	gruppe − 1
q	v., gruppe

Sett medianen inn i B

Good-Partition(A, p, r)

$n = r - p + 1$
$m = \lceil n/5 \rceil$
create $\mathrm{B}[1 \,..\, m]$
for $i = 0$ **to** $m - 1$
    $q = p + 5i$
    sort $\mathrm{A}[q \,..\, q + 4]$
    $\mathrm{B}[i] = \mathrm{A}[q + 2]$
$x = \textsc{Select}(\mathrm{B}, 1, m, \lfloor m/2 \rfloor)$

A	tabell
p	venstre
r	høyre
n	antall
m	grupper
B	medianer
i	gruppe − 1
q	v., gruppe
x	splitt

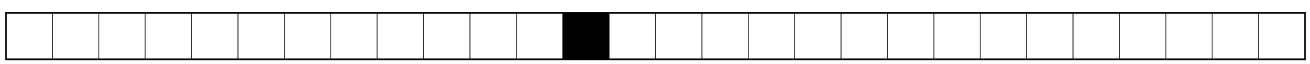
Finn medianen av medianene … med Select!

```
GOOD-PARTITION(A, p, r)
n = r − p + 1
m = ⌈n/5⌉
create B[1 . . m]
for i = 0 to m − 1
        q = p + 5i
        sort A[q . . q + 4]
        B[i] = A[q + 2]
x = SELECT(B, 1, m, ⌊m/2⌋)
return PARTITION-AROUND(A, p, r, x)
```

A	tabell
p	venstre
r	høyre
n	antall
m	grupper
B	medianer
i	gruppe − 1
q	v., gruppe
x	splitt

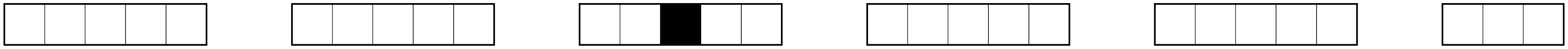
Bruk medianen av medianene som pivot

$$3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 2\right) \geqslant \frac{3n}{10} - 6$$



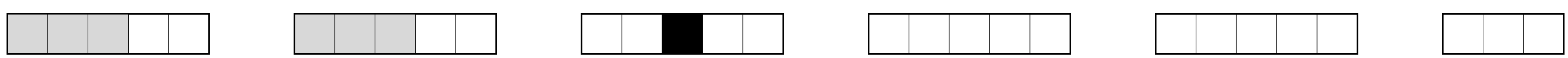
Hvor mange har vi på hver side av pivot?

$$3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 2\right) \geqslant \frac{3n}{10} - 6$$



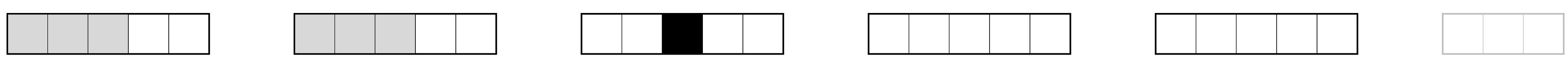
Vi har delt inn i $\lceil n/5 \rceil$ grupper

$$3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5}\right\rceil\right\rceil - 2\right) \geqslant \frac{3n}{10} - 6$$



Minst halvparten bidrar med 3 verdier mindre enn pivot

$$3\left(\left\lceil\frac{1}{2}\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil\right\rceil - 2\right) \geqslant \frac{3n}{10} - 6$$



Unntatt én, om $\lceil n/5 \rceil > n/5 \ldots$

$$3\left(\left\lceil\frac{1}{2}\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil\right\rceil - 2\right) \geqslant \frac{3n}{10} - 6$$

… og unntatt gruppen med pivot

$$3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 2\right) \geqslant \frac{3n}{10} - 6$$

Vi har altså minst så mange elementer mindre enn pivot . . .

$$3\left(\left\lceil \frac{1}{2}\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil - 2\right) \geqslant \frac{3n}{10} - 6$$

. . . og så mange som er større

$$\mathrm{T}(n) \leqslant \mathrm{T}(\lceil n/5 \rceil) + \mathrm{T}(7n/10 + 6) + \mathrm{O}(n)$$

$$T(n) \leqslant T(\lceil n/5 \rceil) + T(7n/10 + 6) + O(n)$$

Rekursiv bruk av SELECT for å finne median av $\lceil n/5 \rceil$ gruppemedianer

$$\mathrm{T}(n) \leqslant \mathrm{T}(\lceil n/5 \rceil) + \mathrm{T}(7n/10 + 6) + \mathrm{O}(n)$$

Rekursivt kall i største «halvdel», med $n - (3n/10 - 6)$ elementer

$$\mathrm{T}(n) \leqslant \mathrm{T}(\lceil n/5 \rceil) + \mathrm{T}(7n/10 + 6) + \mathrm{O}(n)$$

PARTITION, gruppering, sortering av grupper, etc.

$$T(n) \leqslant T(\lceil n/5 \rceil) + T(7n/10 + 6) + an$$

Her er a konstanten fra O-notasjonen ($n_0 = 1$)

$$T(n) \leqslant T(\lceil n/5 \rceil) + T(7n/10 + 6) + an$$

Vil vise $T(n) \le cn$ med substitusjon

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(n) &\leqslant \mathrm{T}(\lceil n/5 \rceil) + \mathrm{T}(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant c\lceil n/5 \rceil + c(7n/10 + 6) + an
\end{aligned}
$$

Induksjonshypotese: $\mathrm{T}(k) \leq ck$ for alle $k < n$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(n) &\leqslant \mathrm{T}(\lceil n/5 \rceil) + \mathrm{T}(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant c\lceil n/5 \rceil + c(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant cn/5 + c + 7cn/10 + 6c + an
\end{aligned}
$$

Vanlig algebra/«ligningsløsning»

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leqslant T(\lceil n/5 \rceil) + T(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant c\lceil n/5 \rceil + c(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant cn/5 + c + 7cn/10 + 6c + an \\
&= 9cn/10 + 7c + an
\end{aligned}
$$

Vanlig algebra/«ligningsløsning»

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(n) &\leqslant \mathrm{T}(\lceil n/5 \rceil) + \mathrm{T}(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant c\lceil n/5 \rceil + c(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant cn/5 + c + 7cn/10 + 6c + an \\
&= 9cn/10 + 7c + an \\
&= cn + \big(an - (cn/10 + 7c)\big)
\end{aligned}
$$

Vanlig algebra/«ligningsløsning»

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(n) &\leqslant \mathrm{T}(\lceil n/5 \rceil) + \mathrm{T}(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant c\lceil n/5 \rceil + c(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant cn/5 + c + 7cn/10 + 6c + an \\
&= 9cn/10 + 7c + an \\
&= cn + \big(an - (cn/10 + 7c)\big) \\
&\leqslant cn
\end{aligned}
$$

... hvis c er stor nok, så $an \leqslant cn/10 - 7c$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(n) &\leqslant \mathrm{T}(\lceil n/5 \rceil) + \mathrm{T}(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant c\lceil n/5 \rceil + c(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant cn/5 + c + 7cn/10 + 6c + an \\
&= 9cn/10 + 7c + an \\
&= cn + (an - (cn/10 + 7c)) \\
&\leqslant cn
\end{aligned}
$$

F.eks. $c \geqslant 20a$, hvis $n \geqslant 140$. (La $n < 140$ være grunntilfellet!)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(n) &\leqslant \mathrm{T}(\lceil n/5 \rceil) + \mathrm{T}(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant c\lceil n/5 \rceil + c(7n/10 + 6) + an \\
&\leqslant cn/5 + c + 7cn/10 + 6c + an \\
&= 9cn/10 + 7c + an \\
&= cn + \big(an - (cn/10 + 7c)\big) \\
&\leqslant cn
\end{aligned}
$$

Og dermed er induksjonstrinnet komplett!

$$T(n) = \Theta(n)$$

Garantert en viss prosent på hver side av pivot