

# Forelesning 9

## Bonusmateriale

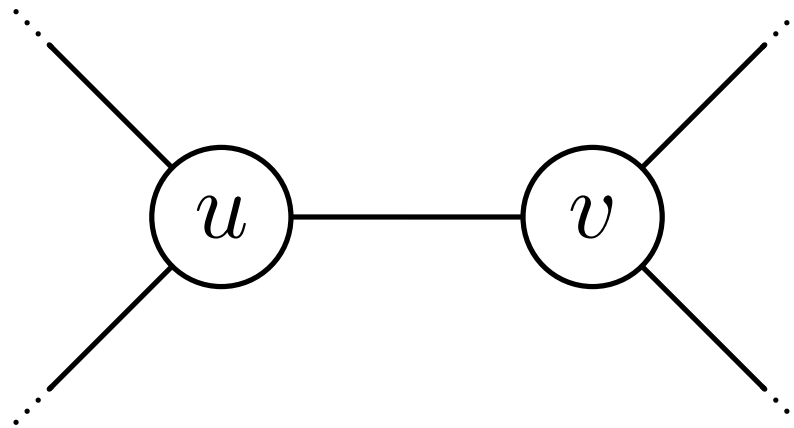
**Ting som ikke ble med i forelesningen,  
men som kanskje kan være av interesse**

# Dekomponering

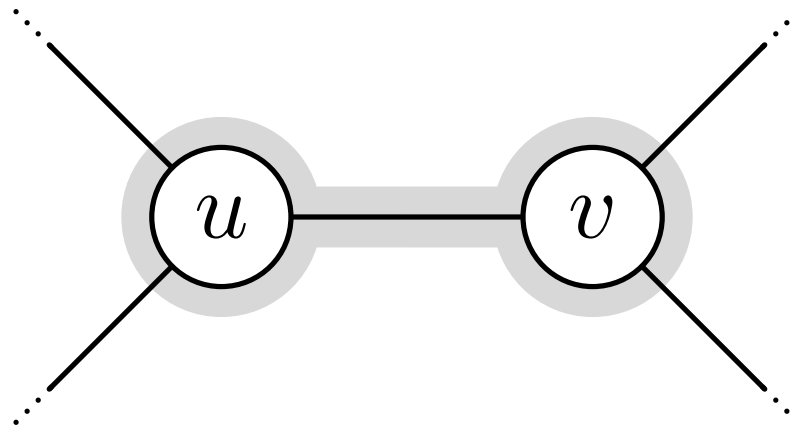
**I den rekursive designen bruker jeg kant-  
kontraksjon.**

**Dette er bare en innledende forklaring;  
ikke sentralt og ikke diskutert i boka!**

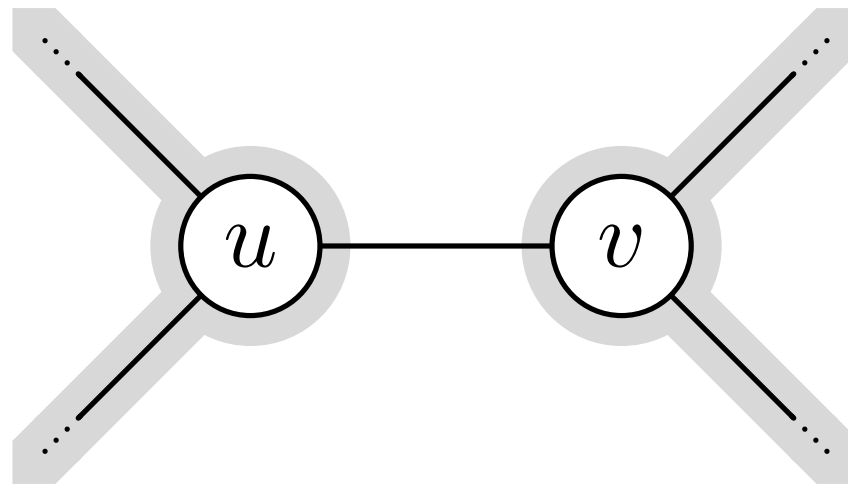
Denne typen kontraksjon (contraction)  
beskrives på slutten av appendiks B.4  
i boka.



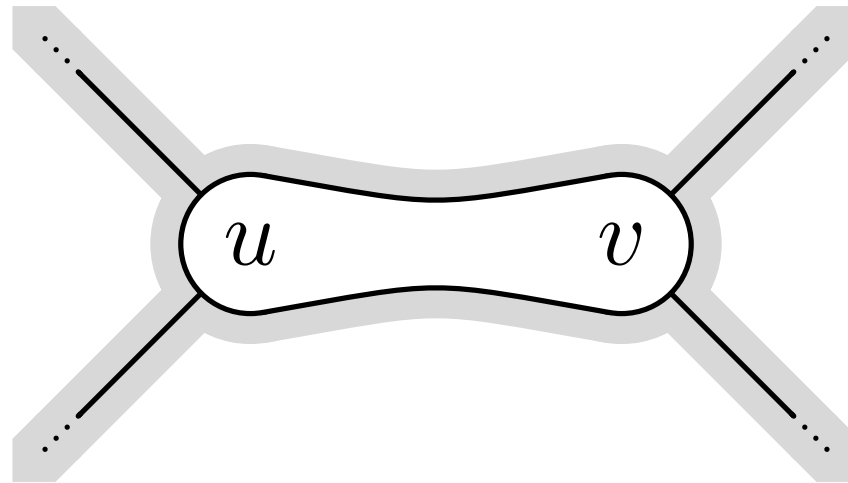
Vi vil koble sammen alle nodene i grafen billigst mulig



Om kanten  $uv$  skal inngå i sammenkoblingen...

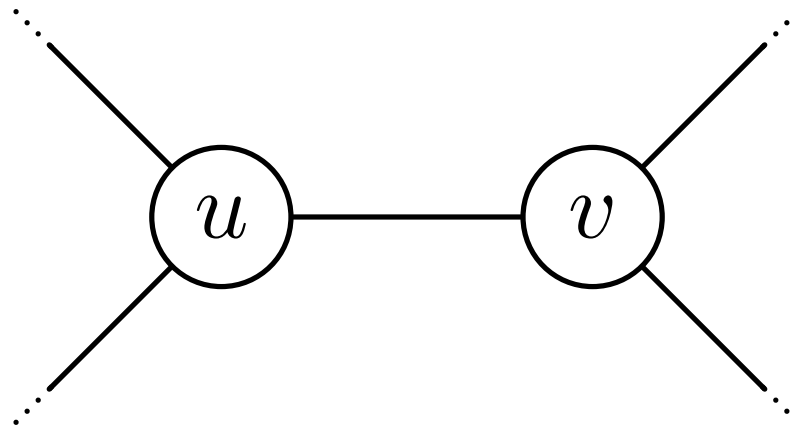


...må den kobles til resten av grafen billigst mulig

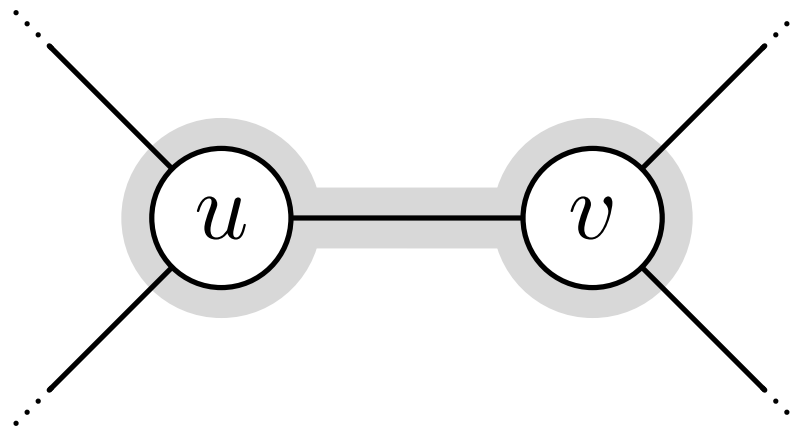


Det er bare en mindre instans, der  $uv$  oppfører seg som en node!

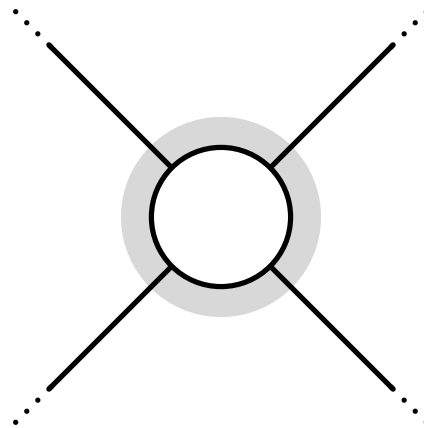




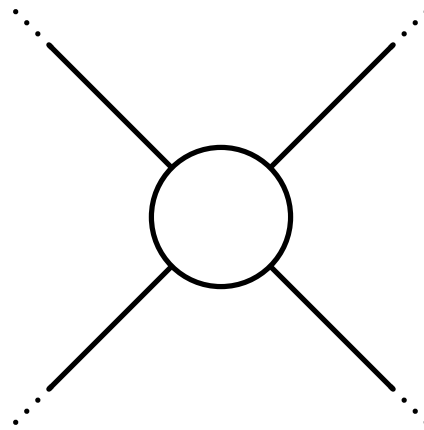
Dette kalles å kontrahere  $uv$



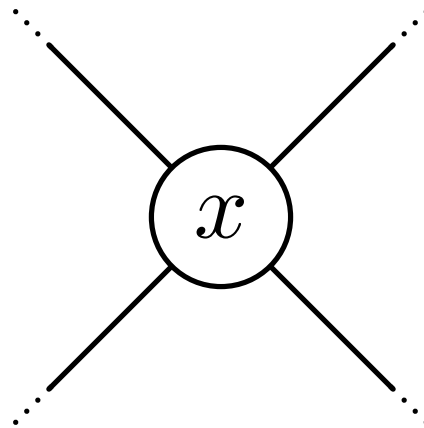
Dette kalles å kontrahere  $uv$



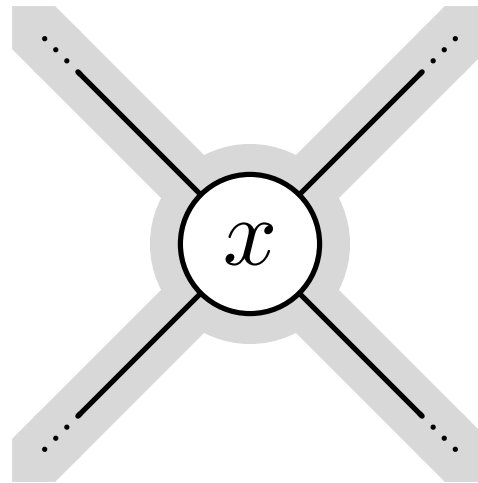
Dette kalles å kontrahere  $uv$



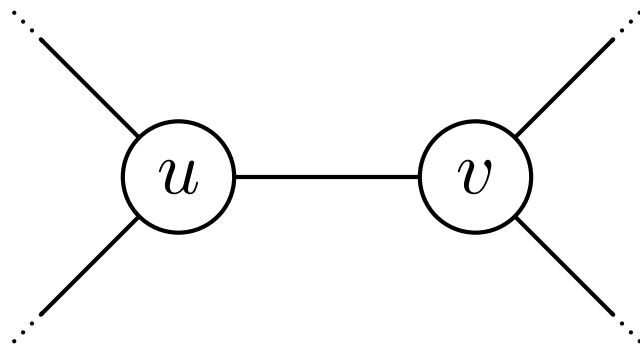
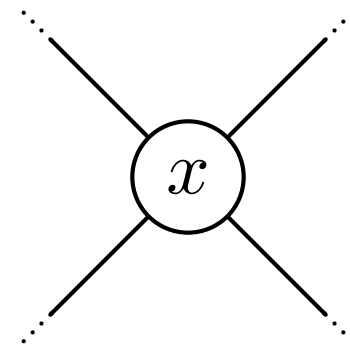
Nodene  $u$  og  $v$  byttes ut med en ny node  $x$



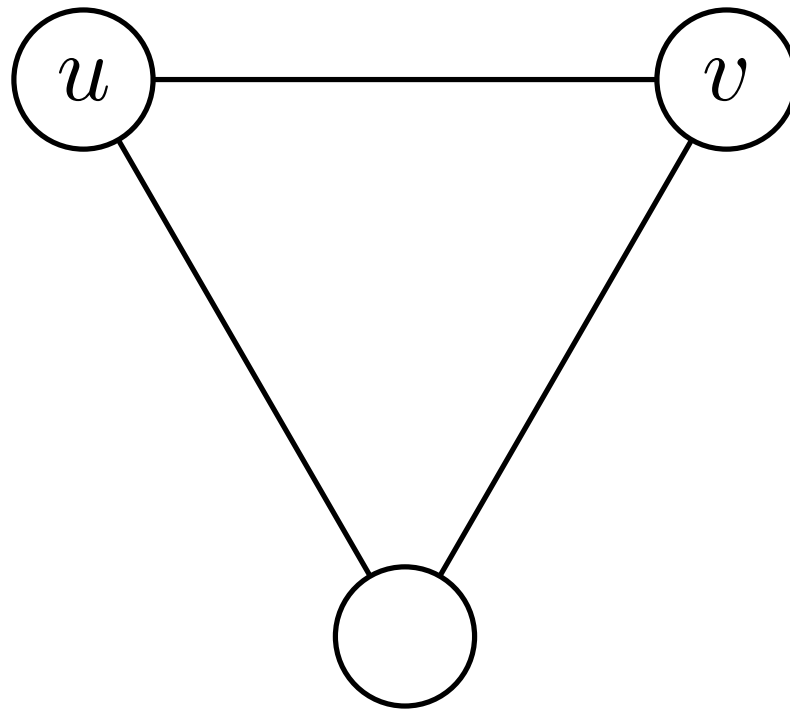
Nodene  $u$  og  $v$  byttes ut med en ny node  $x$



Noden  $x$  arver alle kantene til  $u$  og  $v$ , unntatt  $uv$ , som fjernes

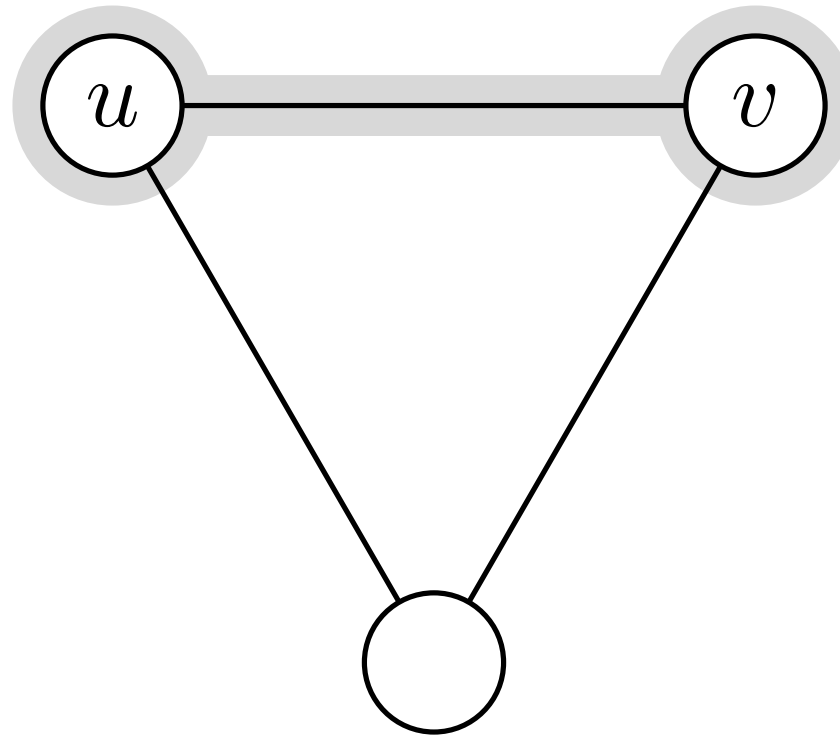
 $G$  $G/uv$ 

Den resultetende grafen kaller vi  $G/uv$

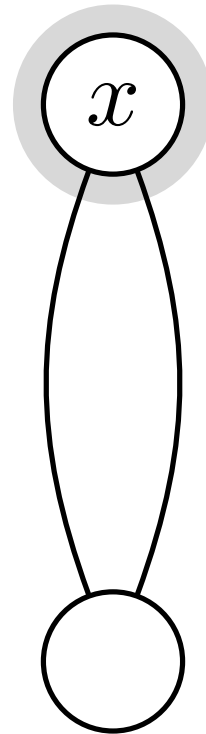


Hvis  $u$  og  $v$  er koblet til samme node...

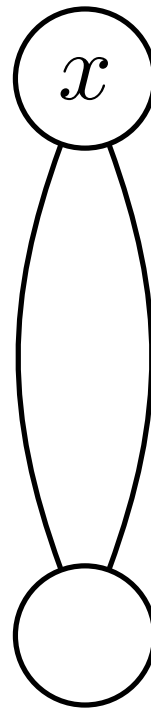




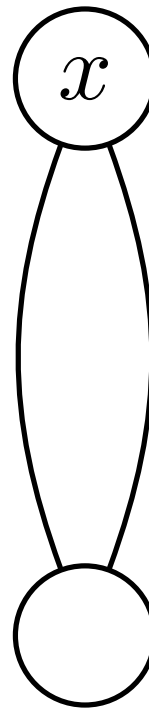
Hvis  $u$  og  $v$  er koblet til samme node...



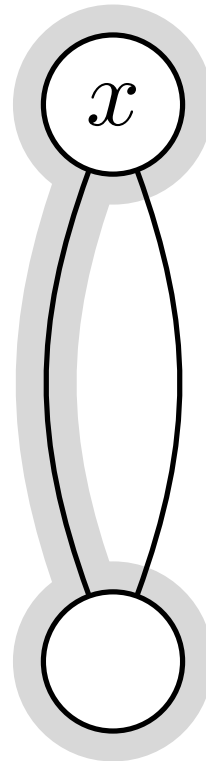
Hvis  $u$  og  $v$  er koblet til samme node...



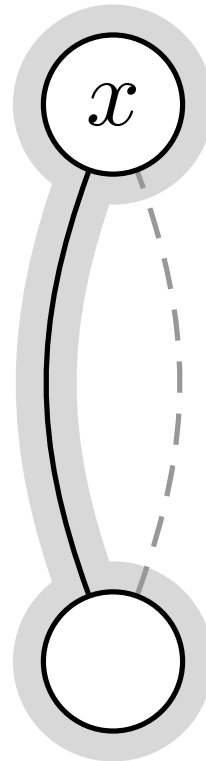
... får vi parallelle kanter!



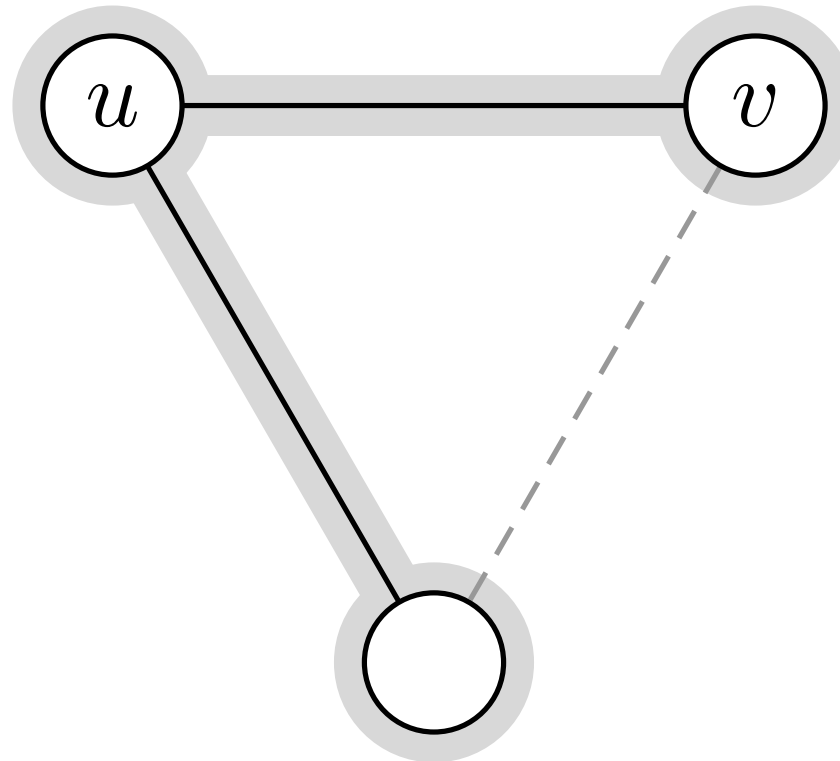
Vi tillater det akkurat her



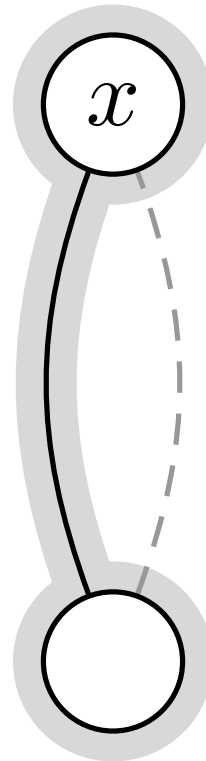
Om vi velger én av de parallelle kantene...



...så kan ikke de andre brukes i treet

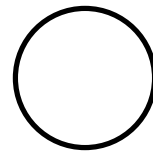


(Det ville ha gitt en sykel i den opprinnelige grafen)



Så når vi kontraherer denne ene kanten...





... fjernes også de andre

Instans	Løsning
Dekomponering	Kombinasjon IS
Delinstanser	Delløsninger IH
Grunntilfelle ...	Grunnløsning ...

Instans	Løsning
Dekomponering	Kombinasjon IS
Delinstanser	Delløsninger IH
Grunntilfelle	Grunnløsning

Hva er input?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning
Dekomponering	Kombinasjon IS
Delinstanser	Delløsninger IH
Grunntilfelle	Grunnløsning

Hva er input?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning
Dekomponering	Kombinasjon <span style="float: right;">IS</span>
Delinstanser	Delløsninger <span style="float: right;">IH</span>
Grunntilfelle	Grunnløsning

Hva ønsker vi at output skal være?

Instans	Løsning
Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Letteste spennetre for $G$
Dekomponering	Kombinasjon IS
Delinstanser	Delløsninger IH
Grunntilfelle	Grunnløsning

Hva ønsker vi at output skal være?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spenntre for $G$
Dekomponering	Kombinasjon <span style="float: right;">IS</span>
Delinstanser	Delløsninger <span style="float: right;">IH</span>
Grunntilfelle	Grunnløsning

Hvordan kan vi krympe eller dele opp instansen?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spenntre for $G$
Dekomponering For hver kant $e \in E$ , prøv å kontrahere $e$	Kombinasjon <span style="float: right;">IS</span>
Delinstanser	Delløsninger <span style="float: right;">IH</span>
Grunntilfelle	Grunnløsning

Hvordan kan vi krympe eller dele opp instansen?



Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spenntre for $G$
Dekomponering For hver kant $e \in E$ , prøv å kontrahere $e$	Kombinasjon IS
Delinstanser	Delløsninger IH
..... Grunntilfelle	..... Grunnløsning

Hva har vi brutt problemet ned til?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spenntre for $G$
Dekomponering For hver kant $e \in E$ , prøv å kontrahere $e$	Kombinasjon IS
Delinstanser $G/e$ , for hver $e$	Delløsninger IH
Grunntilfelle	Grunnløsning

Hva har vi brutt problemet ned til?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spenntre for $G$
Dekomponering For hver kant $e \in E$ , prøv å kontrahere $e$	Kombinasjon <span style="float: right;">IS</span>
Delinstanser $G/e$ , for hver $e$	Delløsninger <span style="float: right;">IH</span>
Grunntilfelle	Grunnløsning

Hvor stopper dekomponeringen?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spenntre for $G$
Dekomponering For hver kant $e \in E$ , prøv å kontrahere $e$	Kombinasjon IS
Delinstanser $G/e$ , for hver $e$	Delløsninger IH
Grunntilfelle Én node	Grunnløsning

Hvor stopper dekomponeringen?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spennetre for $G$
Dekomponering For hver kant $e \in E$ , prøv å kontrahere $e$	Kombinasjon IS
Delinstanser $G/e$ , for hver $e$	Delløsninger IH
Grunntilfelle Én node	Grunnløsning

Hva er løsningen da?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spenntre for $G$
Dekomponering For hver kant $e \in E$ , prøv å kontrahere $e$	Kombinasjon IS
Delinstanser $G/e$ , for hver $e$	Delløsninger IH
Grunntilfelle Én node	Grunnløsning Tomt spenntre

Hva er løsningen da?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spennetre for $G$
Dekomponering For hver kant $e \in E$ , prøv å kontrahere $e$	Kombinasjon <span style="float: right;">IS</span>
Delinstanser $G/e$ , for hver $e$	Delløsninger <span style="float: right;">IH</span>
Grunntilfelle Én node	Grunnløsning Tomt spennetre

Hva er løsningene for delinstansene?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spennetre for $G$
Dekomponering For hver kant $e \in E$ , prøv å kontrahere $e$	Kombinasjon <span style="float: right;">IS</span>
Delinstanser $G/e$ , for hver $e$	Delløsninger <span style="float: right;">IH</span> Letteste spennetre for $G/e$
Grunntilfelle Én node	Grunnløsning Tomt spennetre

Hva er løsningene for delinstansene?



Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spenntre for $G$	
Dekomponering For hver kant $e \in E$ , prøv å kontrahere $e$	Kombinasjon	IS
Delinstanser $G/e$ , for hver $e$	Delløsninger Letteste spenntre for $G/e$	IH
Grunntilfelle Én node	Grunnløsning Tomt spenntre	

Hvordan bygger vi en full løsning av delløsninger?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spenntre for $G$
Dekomponering For hver kant $e \in E$ , prøv å kontrahere $e$	Kombinasjon <span style="float: right;">IS</span> Velg $e$ der delløsning kombinert med $e$ er lettest
Delinstanser $G/e$ , for hver $e$	Delløsninger <span style="float: right;">IH</span> Letteste spenntre for $G/e$
Grunntilfelle Én node	Grunnløsning Tomt spenntre

Hvordan bygger vi en full løsning av delløsninger?

Instans Sammenhengende, urettet, vektet graf $G = (V, E)$	Løsning Letteste spenntre for $G$
Dekomponering For hver kant $e \in E$ , prøv å kontrahere $e$	Kombinasjon <span style="float: right;">IS</span> Velg $e$ der delløsning kombinert med $e$ er lettest
Delinstanser $G/e$ , for hver $e$	Delløsninger <span style="float: right;">IH</span> Letteste spenntre for $G/e$
Grunntilfelle Én node	Grunnløsning Tomt spenntre

- › **Delinstans: Koble sammen resten, billigst mulig**
- › **Dekomponering: Et sett med kanter vi velger mellom**
- › **Hvert alternativ gir ny, mindre delinstans**

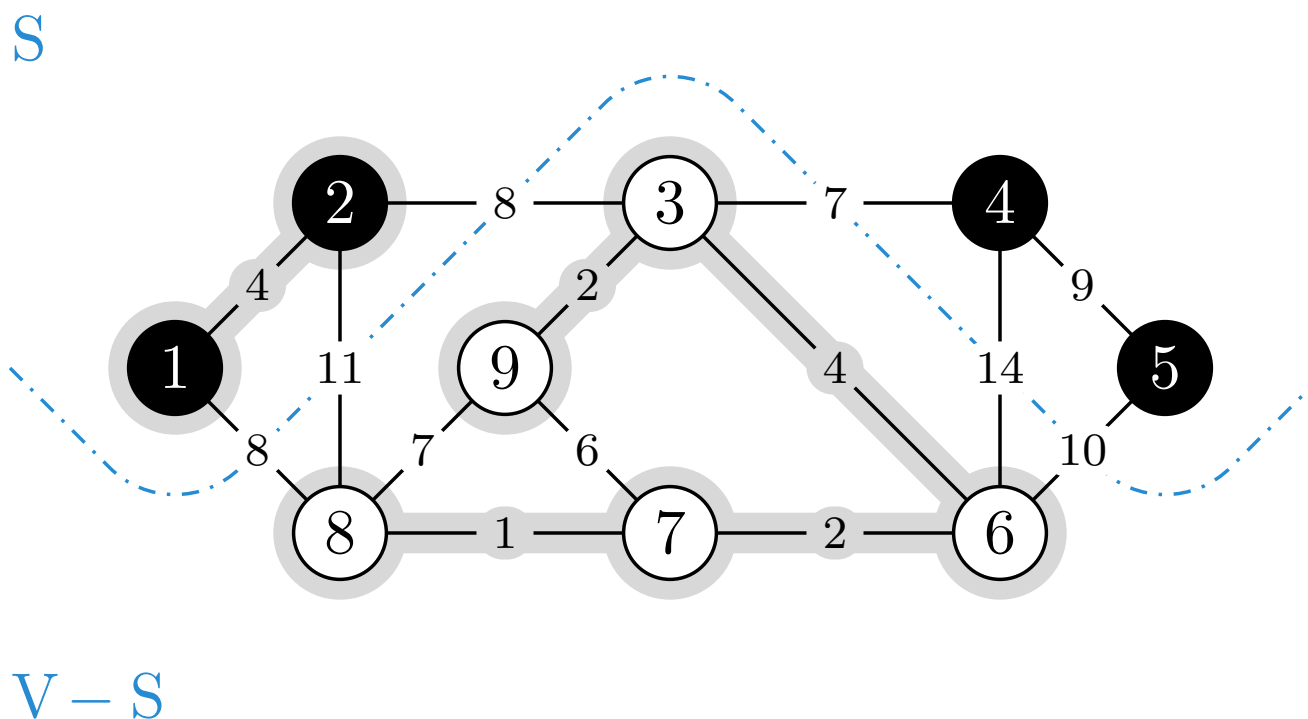
- **Dekomponeringen er gyldig, dvs., vi har optimal delstruktur**
- **Suboptimal delløsning kan byttes med en bedre, og gi bedre totalløsning**

- Denne designen gir oss en DP-løsning
- Men vi ønsker å gjøre valget grådig
- Dvs., vi vil velge én og én kant

# Teorem 23.1

Tilsvaret eksemplet med elv/broer i forelesningen.

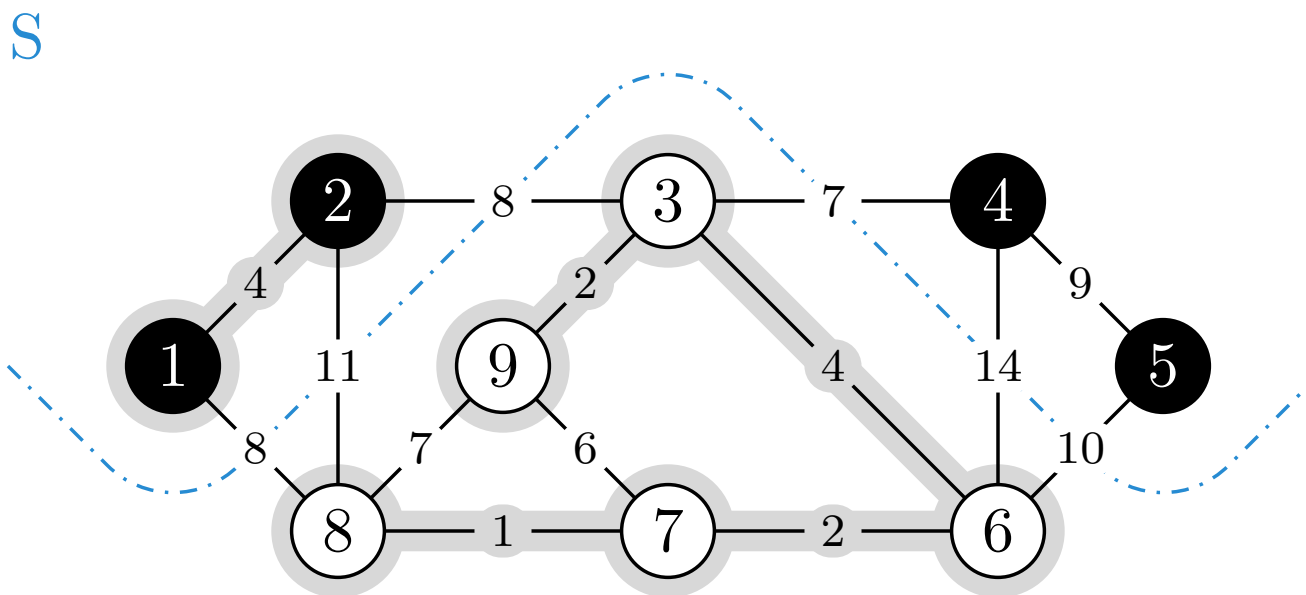
Et snitt er bare en bipartisjon av nodene i grafen. Et snitt respekterer A dersom ingen av kantene i A krysser snittet (dvs., går mellom de to partisjonene).



Et snitt  $(S, V - S)$  som respekterer kantmengden  $A$  (uthevet)

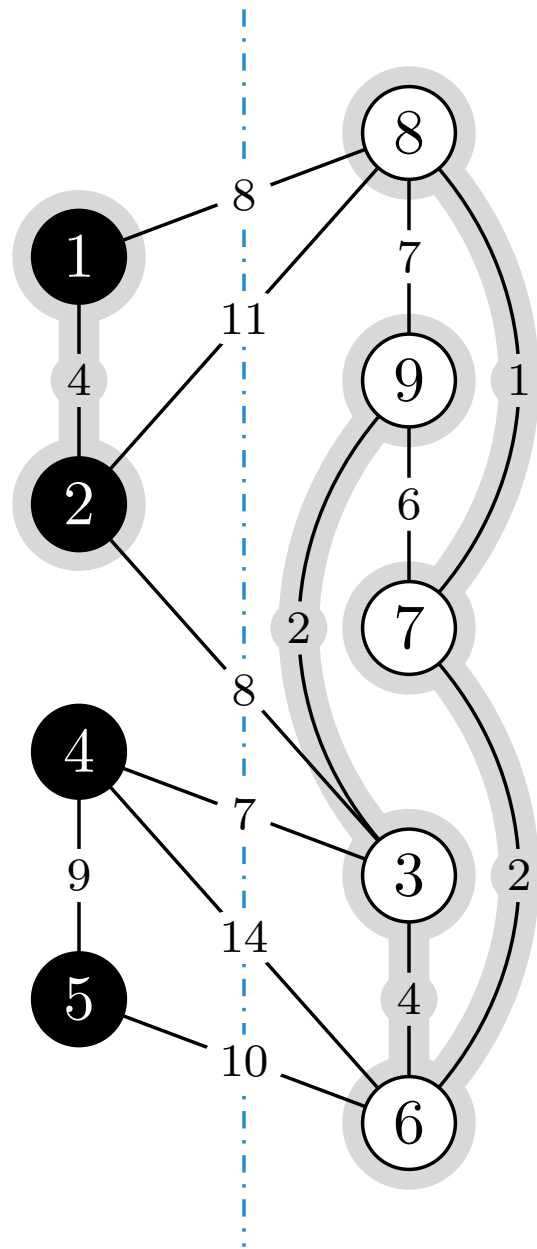


En «lett» kant over et snitt er en med minimal vekt blant kantene som går over snittet.



Kanten (4, 3) er en (unik) lett kant over snittet

S

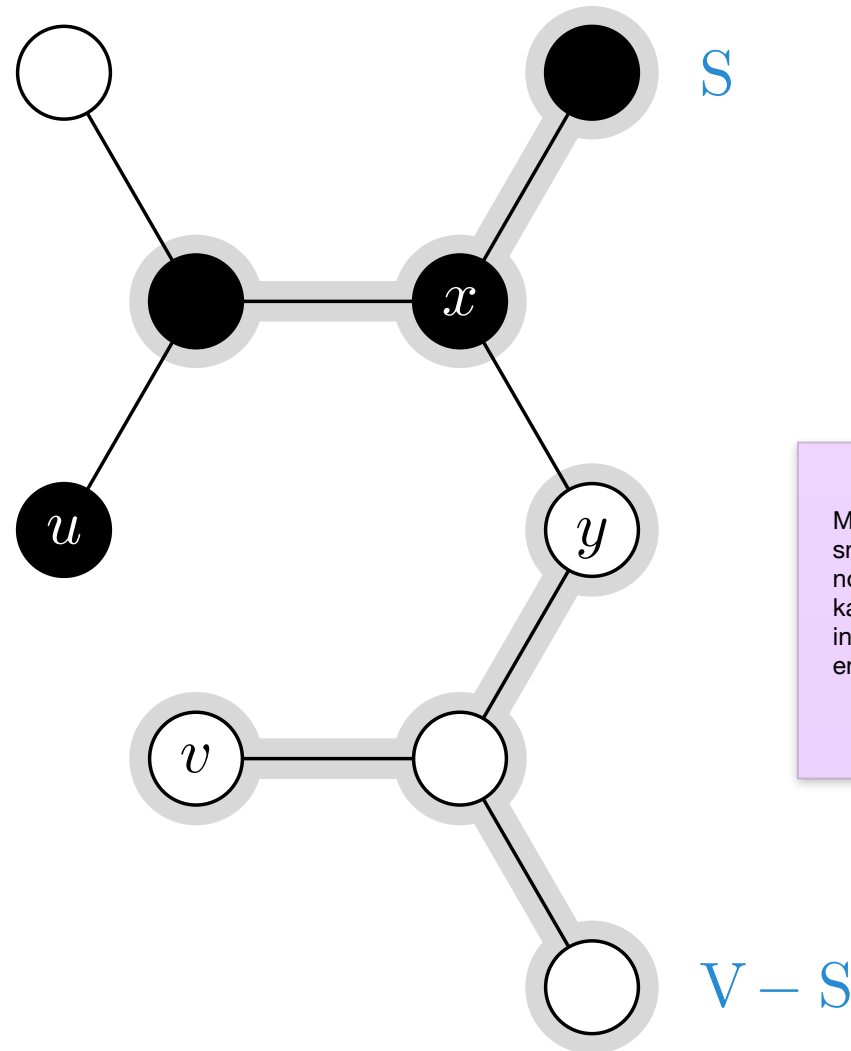


Samme snitt, tegnet på en annen måte. Vi vurderer her altså kanter som går på tvers av midtlinjen.

V - S

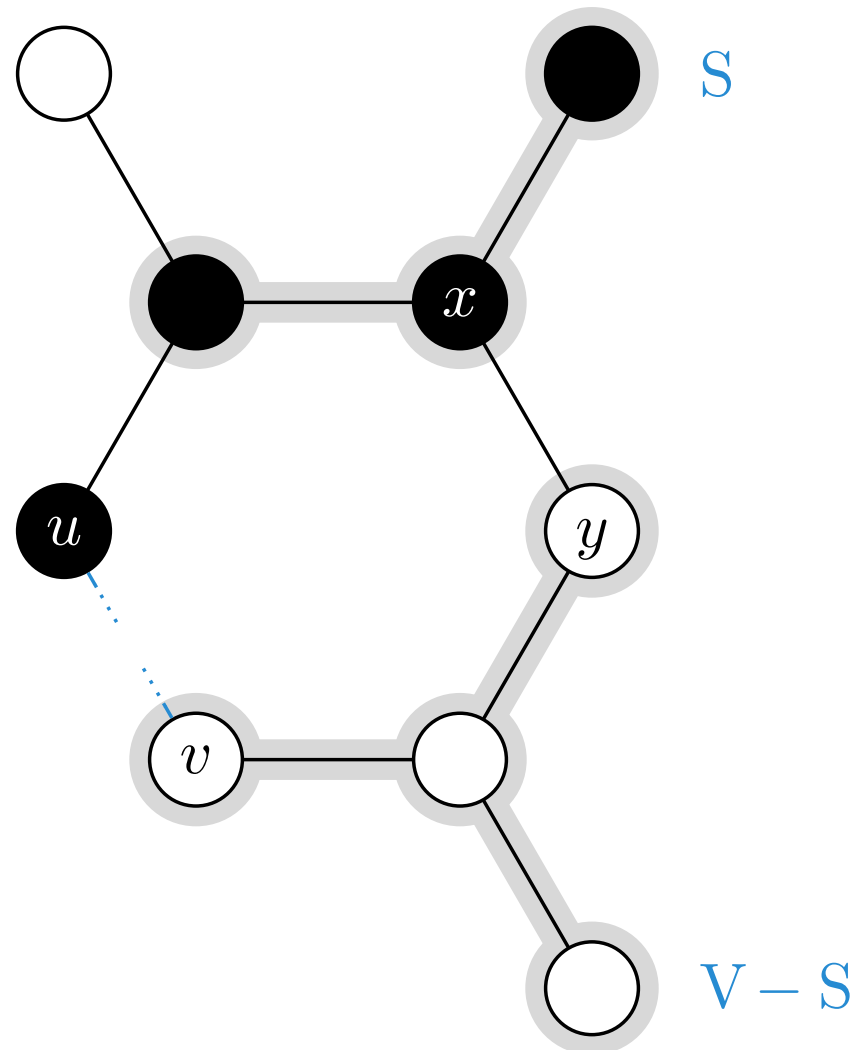
- › «Exchange argument», som før
- › Ta en optimal (eller vilkårlig) løsning som ikke har valgt grådig
- › Vis at vi kan endre til det grådige valget uten å få en dårligere løsning

T er den delen av grafen som er tegnet opp her, altså de nodene og kantene vi ser. (Resten av grafen er skjult.)

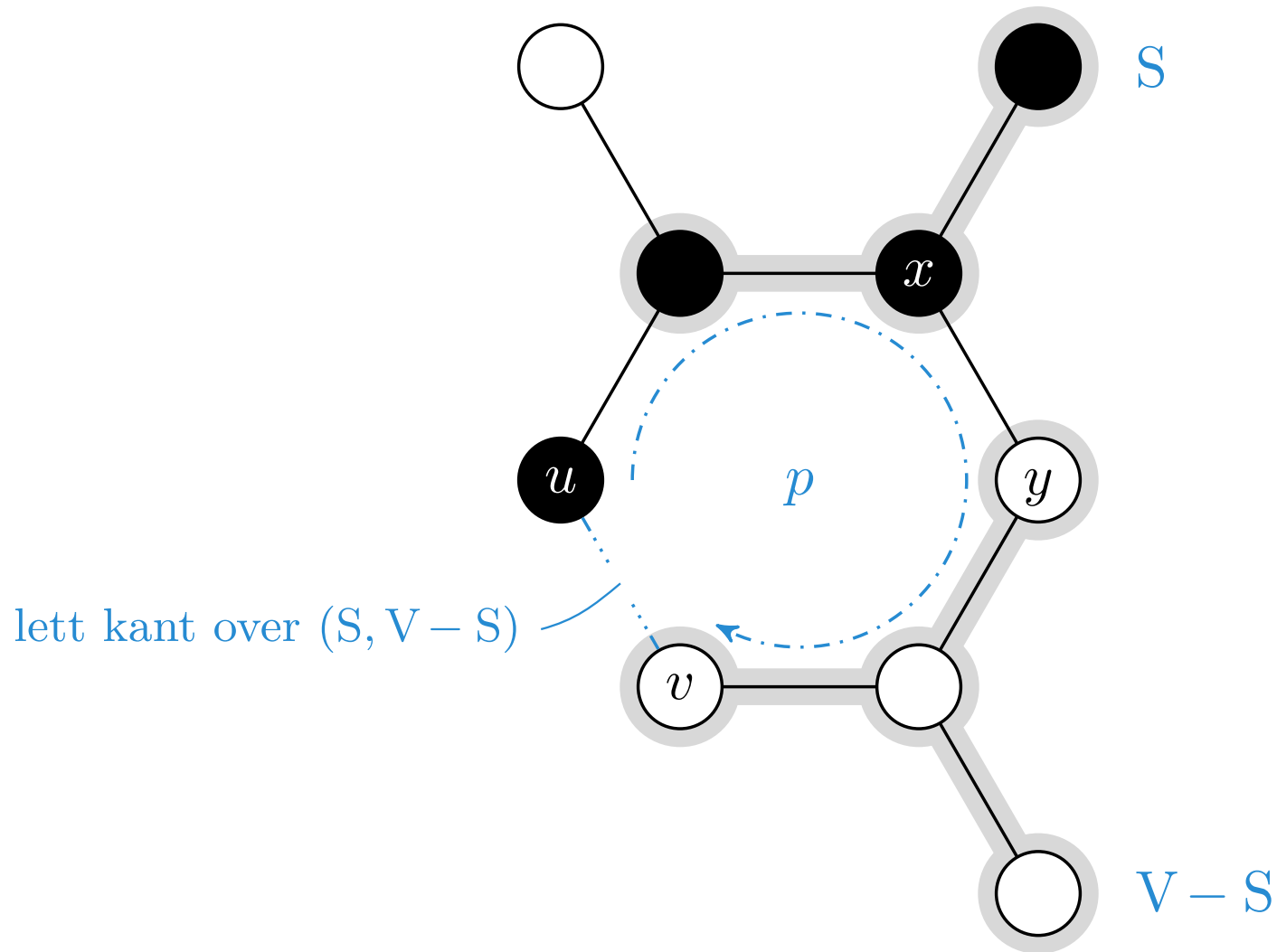


Mengden S er de svarte nodene, så snittet går mellom de svarte og hvite nodene. Mengden A er de uthevede kantene (som altså respekterer snittet; ingen kanter går mellom en svart og en hvit node.)

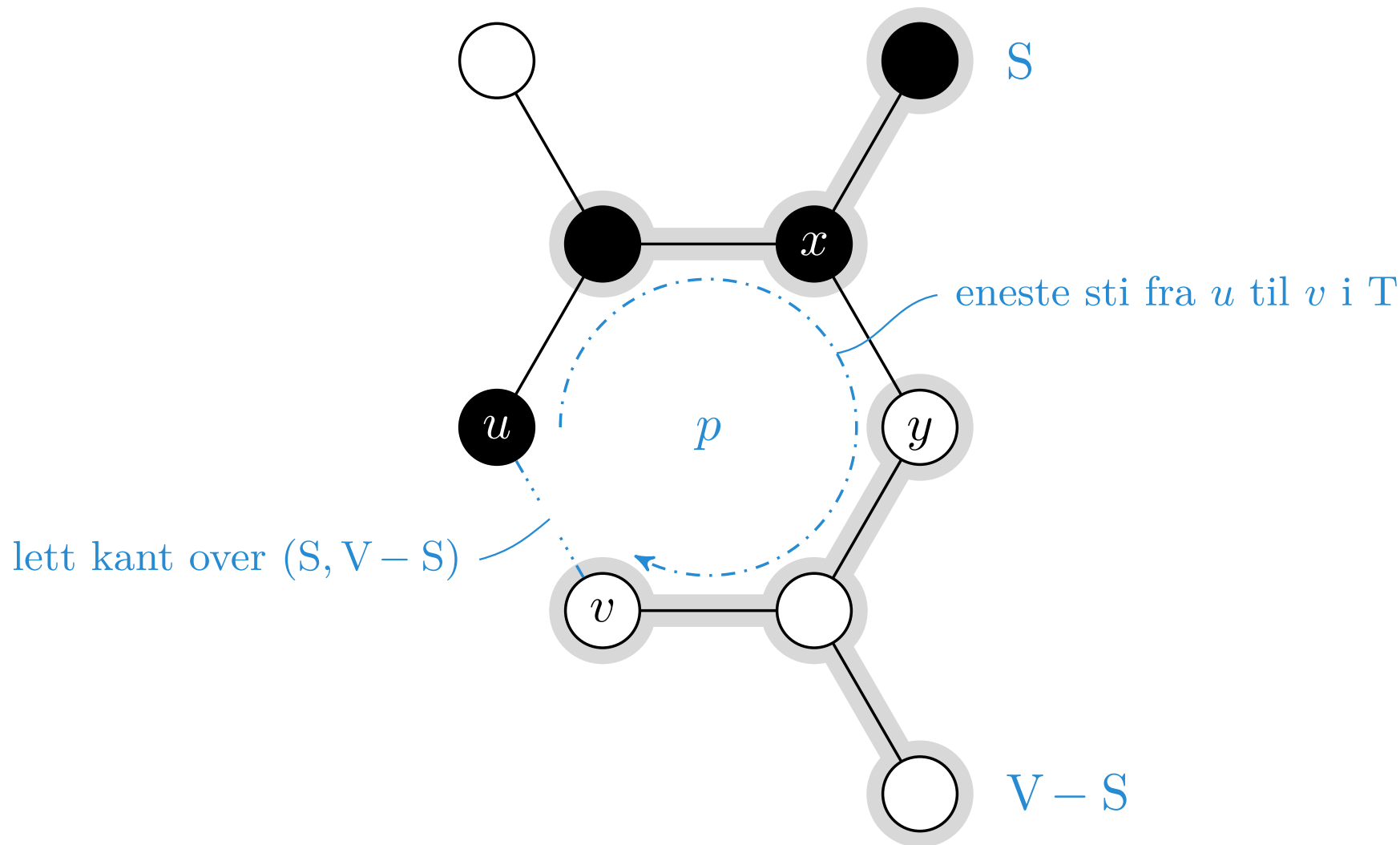
Spennetreet T inneholder A og snittet  $(S, V - S)$  respekterer A



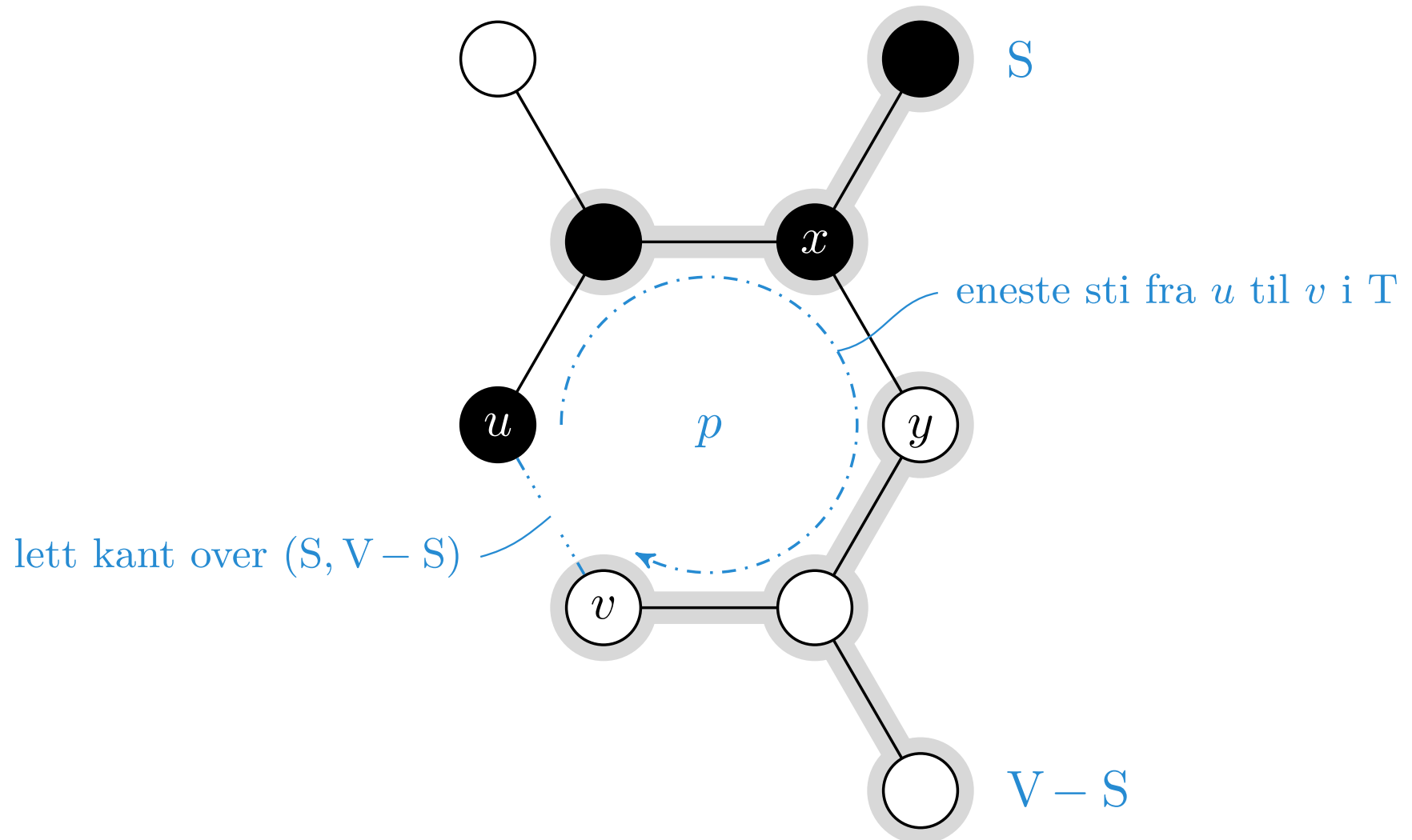
Kanten  $(u, v)$  er en lett kant over snittet  $(S, V - S)$



Et spennetre vil ha nøyaktig én sti fra  $u$  til  $v$

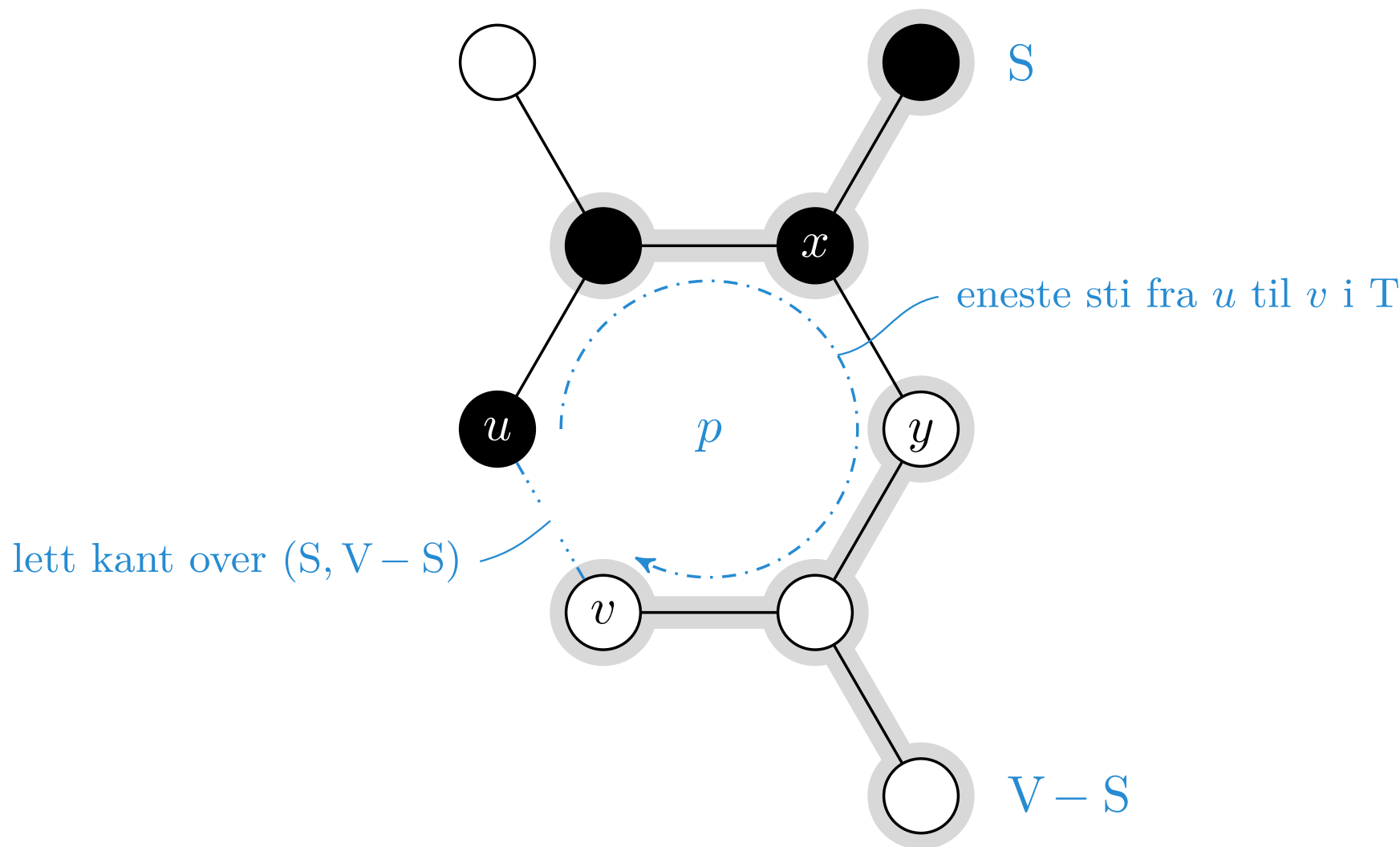


$T$  har én kant  $(x, y)$  over snittet, og  $w(u, v) \leq w(x, y)$



Hvis  $(u, v)$  erstatter  $(x, y)$  i  $T'$ , får vi  $w(T') \leq w(T)$





$T$  var vilkårlig og  $T'$  minst like bra, så  $(u, v)$  er trygg for  $A$