45011 Algoritmer og datastrukturer
Løsningsforslag eksamen 9. august 1993

Oppgave 1

a)
Beregne x^n.

b)
Linjene:
(3) **if** n = 1 **then**
(4) pow := x
else
kan fjernes, idet linje (7) gjør samme nytte.

c)
pow er fortsatt korrekt idet:
$x^n = (x^{n-1}) \times x$
Effektiviteten til pow vil imidlertid bli påvirket.

d)
(6a) og (6b) vil ikke terminere (normalt) dersom $n = 2$, dvs: Må beregne pow(x,2) **før** pow(x,2) beregnes, noe som medfører en evig løkke. (6c) er korrekt, men bruk av (6c) fører likevel til lavere effektivitet idet 2 rekursive kall genereres.

e)
Bruker Master-metoden, tilfelle 2 på $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$.
$n^{\log_b a} = 1 \Rightarrow f(n) = \Theta(1) \Rightarrow T(n) = \Theta(\log n) = O(\log n)$.

f)
Resonnement: n odde vil alltid føre til et pow-kall med n jevn og dermed en halvering av n. Tilsvarende for n jevn. Det kan her kreve "2 steg pr. halvering av n", men fortsatt $O(\log n)$ tid.

g)
Med (6c) vil vi ha (worst case: $n = 2^m$): $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(1)$
Master-teoremet, tilfelle 1 gir da: $T(n) = \Theta(n) = O(n)$.

Oppgave 2

a)
Hvert kall på RELAX reduserer også node v's d-verdi, $d(v)$. Initielt er $d(s) = 0$ og enhver "forbedring" vil bety at $d(s)$ blir negativ. I det $d(v) =$ "hittil korteste vei fra s til v", betyr $d(s) < 0$ at G har en sykel (som går innom s) med negativ lengde.

b)

- Dijkstras algoritme **forutsetter** bare positive kantlengder, og man vil få feil svar hvis det fins negative sykler.
- Bellmann-Ford vil oppdage eventuelle sykler med negativ lengde og rapportere FALSE etter $m = (|V| - 1) \cdot |E|$ RELAX-kall.

Oppgave 3

- La $|f_{uv}|$ være maksimal flyt fra u $\rightarrow$ v i G^*, der $G^* =$ "G, med linjekapasiteten til alle kanter i E lik 1"
- G^* har åpenbart $O(|V|)$ noder og $O(|E|)$ kanter, som G.
- For en vilkårlig $u \in V$ er nå (åpenbart):

  $$k = \min_{v \in V - \{u\}} |f_{uv}|,$$

  funnet ved:

  Kant_koplingsgrad(G);

  velg en vilkårlig $u \in V$
  lag G^* som beskrevet ovenfor;
  for hver $v \in V - \{u\}$ **do**
      finn maksimal flyt $|f_{uv}|$ i G^*;
  return den minste av de ovenfor funnede $|V| - 1$ maks-flyt-verdier:

  $$\min_{v \in V - \{u\}} |f_{uv}|$$