EKSAMEN I FAG
45011 ALGORITMER OG DATASTRUKTURER

Fredag 20. desember 1996, kl 0900 - 1300

Faglig kontakt under eksamen: Arne Halaas, tlf 73 593442
Alle kalkulatortyper tillatt. Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Merk: Det anbefales å ikke skrive mer enn totalt 4 sider.

Oppgave 1 (20 %).

Anta at x,y,u og v er variable av type "vektor" (PASCAL):

```
Type  indeks = [1..max] ; vektor = array indeks of real;
```

Gitt den rekursive funksjonen:

```
function P(x,y : vektor;  i,j : indeks) : real;
begin
      if i > j  then P := 0.0
      else if i = j then P := x[i] * y[i]
            else P :=  P(x,y,i,(i+j) div 2) + P(x,y,(i+j) div 2 + 1,j);
end;
```

"A div B" er heltallsdivisjon der desimaldel fjernes (trunkering).

(a) (8 %) Hvor mange multiplikasjoner (M), henholdsvis addisjoner (A), utføres totalt ved kallet P(u,v,1,7) ?

(b) (6 %) Angi tidskompleksiteten forbundet med kallet P(u,v,1,n) ved $\theta(f(n))$. Finn f(n).

(c) (6 %) Skriv en ikke-rekursiv, effektiv erstatning for funksjonen P.

Oppgave 2 (10 %).

Første fase i haugsortering (Heapsort) består i å "rette" treet, før den til enhver tid minste verdi (numerisk eller alfabetisk) kan trekkes ut fra rotnoden. Anta at treet før retting består av en tekstvektor Z[1..12] med innhold K,O,M,P,L,E,K,S,I,T,E,T (stigende indekser). Rotnoden Z[1] vil altså initielt inneholde tegnet "K", mens Z[12]="T". Anta at laveste indeks har prioritet ved opprykk dersom det er 2 likeverdige alternativer.

a) (10%) Hva innholder Z[1..12] etter at treet er blitt rettet?

Oppgave 3 (18 %)

Ofte er det vanskelig å finne en standard algoritme som passer helt til et gitt praktisk problem. En har da 3 alternativer å velge mellom:
(1) å skrive en ny algoritme, (2) å modifisere en kjent algoritme, eller (3) å modifisere problemet (datasettet) slik at dette passer til en kjent algoritme. Alternativ (1) er klart mest arbeidskrevende.
Anta at vi skal løse korteste-vei-problemer, med 1 kildenode og positive kant-lengder (vekter), der det er mange korteste veier å velge mellom. Anta at det er viktig for oss å finne en korteste vei som består av så få kanter som mulig.

(a) (8%) Vurder alternativ (2): Kan vi modifisere Dijkstras algoritme slik at denne finner en korteste vei som består av et minimalt antall kanter?
Hvis JA: Vis hvordan du vil modifisere Dijkstras algoritme (ta med kun de nødvendige endringer, henvis til Initialize-S-S, Extract-Min, Relax).
Hvis NEI: Gi begrunnelse.

(b) (10%) Vurder alternativ (3): Kan datasettet modifisere slik at Dijkstras algoritme finner en korteste vei som består av et minimalt antall kanter?
Hvis JA: Vis hvordan du vil modifisere datasettet (grafen G, vektene w) slik at Dijkstras algoritme finner en korteste vei som består av et minimalt antall kanter.
Hvis NEI: Gi begrunnelse.

Oppgave 4 (16 %).

Gitt en urettet graf G = (V,E), der V= $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ er n punkter i (x,y)-planet, og der E er n(n-1)/2 kanter (rette linjestykker) som forbinder alle nodepar. G er i dette tilfellet en såkalt geometrisk, eller Euklidsk, graf.
Gitt også følgende funksjon som rekursivt bygger et tre basert på G :

```
function Tre(G,n)
if n= 1 then Tre := {V1} else
begin T := Tre(G-{Vn},n-1)      /fjerner {Vn} med dens kanter/
      La u være en node i T med korteste avstand til node Vn
      Tre := T ∪ {Vn} ∪ {(u,Vn)}  /tilkopler {Vn} og kant til u/
end
```

a) (8 %) Produserer funksjonen Tre minimale spenntrær for geometriske grafer? (Begrunn svaret.)

b) (8%)Vil følgende utkast til rekursiv algoritme kunne brukes til å finne minimale spenntrær i geometriske grafer? (Begrunn svaret.)

I. Del G = (V,E) inn i 2 halvdeler G = G1 ∪ G2 , der x-verdiene for G1's noder er mindre eller lik x-verdiene til G2's noder.
II. Finn minimale spenntrær T1 og T2 for henholdsvis G1 og G2.
III. Forbind T1 og T2 med en kortest mulig kant.

Oppgave 5 (22 %).

Du blir her bedt om å vurdere følgende sorteringsalgoritme:

Algoritme S: Sortering av n verdier $A[1..n]$:
Initialisering:
Steg1: Splitt A i r grupper $G[1..r]$ hver med s elementer. Anta at $r \times s = n$.
Steg2: Finn minste A-verdi i hver gruppe. Anta $\theta(s)$ tid pr. gruppe.
Kall disse r minsteverdiene $m[1..r]$.
Gjenta følgende to steg n ganger:
Steg3: Finn minste verdi, $m[k]$, blant verdiene i $m[1..r]$. Anta $\theta(r)$ tid.
Steg4: $m[k]$ kan nå flyttes (til ett eller annet sted) og erstattes med den minste gjenværende verdien i gruppe k. Anta $\theta(s)$ tid.

Vi trekker her ut en etter en verdi fra A, i stigende orden. Vi bruker enkleste sort sekvensielt gjennomløp for å finne minste-verdiene underveis. Vi antar derfor samme tidsforbruk ,$\theta(r)$ og $\theta(s)$, for henholdsvis Steg 3 og Steg 4 ved alle gjennomløp.

(a) (6%) Hva er tidskompleksiteten for Algoritme S uttrykt ved n,r og s?

(b) (8%) Hvordan bør r og s velges for at Algoritme S skal bli mest mulig effektiv? Uttrykk tidskompleksiteten ved kun n.

(c) (8%) Kan S konkurrere med Quicksort for noen verdier av n? (Drøft)

Oppgave 6 (14 %).

Det anbefales å løse denne oppgaven sist.
Anta at vi har samlet opp n problemer på en PC som står i et nettverk. Disse problemene er tidkrevende og de skal derfor sendes til 2 superdatamaskiner for å bli løst der. Det er kjent at problem P(i) krever t(i) sekunder av superdatamaskinens CPU-tid, i = 1,2,...,n.
Målet vårt er å dele de n problemene i 2 deler, der T1 er summen av t(i)-verdier i del 1, T2 er summen av t(i)-verdier i del 2, og der max(T1,T2) er minimal.

(a) (14%) Skisser (kort) en algoritme-ide for delingen, og gi et best mulig estimat for algoritmens tidskompleksitet.