

# EKSAMEN I FAG 78010 / 45011

## ALGORITMER OG DATASTRUKTURER

Lørdag 13. desember 1997, kl. 0900 - 1300

Faglig kontakt under eksamen: Arne Halaas, tlf 73 59 34 42

Alle kalkulator typer tillatt. Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.

**Merk:** Det anbefales å ikke skrive mer enn totalt 1 side pr oppgave.

### Oppgave 1 (15 %)

To lag A og B skal spille inntil  $2n-1$  kamper, der vinneren er det lag som først oppnår  $n$  seire. Ingen kamper ender uavgjort. For hver kamp er det samme sannsynlighet  $p$  for at lag A vinner,  $q = 1-p$  for at lag B vinner.

(a) (10%) Beskriv presist hva følgende rekursive funksjon beregner:

```
function P(i,j)
  if i = 0 then return 1
  else if j = 0 then return 0
  else return (p*P(i-1,j) + q*P(i,j-1))
```

(b) (5%) La  $T(k)$  være tiden i verste tilfelle for beregning av  $P(i,j)$ , der  $k = i+j$ . Beregn tidskompleksiteten for  $T(k)$  ved  $O(\ )$ - notasjonen

### Oppgave 2 (30 %).

Gitt en  $n \times n$  nabomatrix (adjacency matrix)  $K(1..n,1..n)$  som uttrykker personlige relasjoner mellom  $n$  personer.  $K(i,j) = 1$  dersom person  $\#i$  kjenner person  $\#j$ , ellers er  $K(i,j) = 0$ .

Vi skal løse **Kjendis-problemet**: Finnes en person  $\#p$  som ikke kjenner noen andre enn seg selv, men som alle de øvrige personene kjenner?

Problemet kan løses trivielt med en  $\theta(n^2)$ -algoritme der vi kan risikere å måtte undersøke alle elementene i  $K$ . Dette er ikke effektivt.

(a) (15%) Gi en ide til en  $\theta(n)$ -algoritme som løser Kjendis-problemet. Legg vekt på kun å få fram algoritmeideen, kort og konsist.

(b) (10%) Gi en kompakt beskrivelse (kvasikode) som viser hvordan du vil realisere ideen fra (a) i form av et program. Trivielle deler kan forklares med enkel tekst.

(c) (5 %) Begrunn kort hvorfor din algoritme har kompleksitet  $\theta(n)$ .

### Oppgave 3 (30 %)

Nedover langs en stri elv ligger  $n$  utleiesteder for kano på rekke og rad. En kano kan leies på ethvert slikt sted og returneres på hvilket som helst annet utleiested lengre ned i elva. Det er ikke mulig å padle motstrøms. For hvert mulig avgangssted  $\#i$  og ankomststed  $\#j$  er det gitt en leiepris  $P(i,j)$ . Prisene er slik at  $P(i,j)$  kan være høyere enn ved å leie flere forskjellige kanoer på strekningen mellom sted  $\#i$  og sted  $\#j$ . Det koster ikke noe ekstra å bytte kano.

- (a) (20%) Finn en effektiv algoritme for å bestemme laveste pris for leie av kano(er) for å komme fra ethvert mulig avgangsted,  $\#1,2,3, \dots, n-1$ , til ethvert mulig ankomststed  $\#2,3, \dots, n$  lenger nede i elva. Din algoritme skal ta utgangspunkt i en kjent algoritme og modifisere denne til å løse problemet mest mulig effektivt. Skriv opp den kjente algoritmen og anmerk (med korte begrunnelser) de endringer du vil gjennomføre.
- (b) (10%) Beregn tidskompleksiteten til din algoritme under (a), og drøft denne i forhold til "den kjente algoritmen."

### Oppgave 4 (25 %)

Alle verdiene i denne oppgaven er heltall.

Et lukket polygon  $P: (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_q, Y_q)$ , der  $(X_1, Y_1) = (X_q, Y_q)$ , består av  $q-1$  punkter i planet.  $P$  avgrenser et **enkelt sammenhengende område**, d.v.s. at det finnes en eller annen sti  $S$  mellom ethvert punktpar innenfor  $P$  slik at  $S$  i sin helhet er innenfor  $P$ . Dersom dette gjelder også når vi krever at  $S$  er en rett linje, sier vi at  $P$  avgrenser et **konvekst område**. Se figurene nederst på siden.

Anta nå at vi skal løse følgende problem A:

Gitt  $n$  punkter  $(U_1, V_1), (U_2, V_2), \dots, (U_n, V_n)$  og polygonet  $P$  som avgrenser et enkelt sammenhengende område. Finn hvilke av de  $n$  punktene som er innenfor  $P$ .

For enkelhets skyld skal du anta at ingen av de  $n$  punktene befinner seg på  $P$ 's rand og at alle punktene ligger innenfor et rektangel som omskriver polygonet.

Gi en kort (2-10 linjers) besvarelse til hver deloppgave nedenfor. Du skal her ta utgangspunkt i en kjent innenfor/utenfor-algoritme, uten å skrive denne av.

- (a) (5 %) Anta at  $P$  avgrenser et konvekst område. Skisser en algoritme som løser problemet A i  $\theta(qn)$  tid. Gi kort forklaring.
- (b) (10 %) Anta at  $P$  avgrenser et konvekst område. Skisser en algoritme som løser problemet A i  $\theta((q+n) \log q)$  tid. Gi kort forklaring.
- (c) (10 %) Anta at  $P$  avgrenser et enkelt sammenhengende område som ikke nødvendigvis er konvekst. Anta også at innenfor/utenfor-algoritmen finner høyst  $\sqrt{q}$  skjæringer med randen, uansett hvilket punkt som testes. Hva er nå kompleksiteten til den mest effektive algoritmen som løser problemet A? Gi kort forklaring.

Eksempler: Et enkelt sammenhengende område og et konvekst område med sine omskrevne rektangler:

