

TDT4120 Algoritmer og datastrukturer

Eksamen, 19. desember 2022, 15:00–19:00

Faglig kontakt Magnus Lie Hetland
Hjelpemiddelkode E

Oppgaver

- 1 Hva er kjøretiden til DIJKSTRA med en binærhaug som prioritetskø?
Oppgi svaret i O -notasjon. Du kan anta $|E| = \Omega(V)$.
- 2 $Q = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$ er en tabell brukt til å implementere en FIFO-kø.
Utfør følgende prosedyre.

```
1 Q.head = 1
2 Q.tail = 2
3 ENQUEUE(Q, 1)
4 ENQUEUE(Q, 2)
5 Q.head = 9
6 Q.tail = 10
7 ENQUEUE(Q, 3)
8 ENQUEUE(Q, 4)
```

Hvordan ser Q ut etterpå?

- 3 Hvorfor er ikke memoisering nyttig når man bruker designmetoden *splitt og hersk* (*divide and conquer*)?
- 4 Hva brukes *kjeding* (*chaining*) til?
Du trenger ikke forklare hvordan det fungerer.
- 5 Gi nedre og øvre asymptotiske grenser for uttrykket $n + \Theta(n^2) + O(n^3)$.
- 6 Forenkle uttrykket $\Omega(n + \Theta(n^2) + O(n^3))$.
- 7 Løs rekurensen $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \lg n$. Uttrykk svaret med Θ -notasjon.

- 8 Start med et tomt binært søketre, og sett så inn følgende verdier, i rekkefølge, med TREE-INSERT:

$\langle 7, 1, 0, 5, 4, 8, 3, 2, 9, 6 \rangle$

Utfør deretter INORDER-TREE-WALK på rotnoden i det resulterende treet. Hva skriver algoritmen ut?

Du skal her kun svare med output fra algoritmen.

- 9 Følgende matrise er vektmatrisen til en vektet, rettet graf:

		1	2	3	4
	1	0	8	∞	2
	2	1	0	5	1
	3	7	∞	0	1
	4	5	8	6	0

Utfør SLOW-APSP på grafen. Hva blir $l_{3,1}^{(2)}$?

- 10 Anta at du legger inn en sjekk i BELLMAN-FORD som avslutter algoritmen dersom ingen avstandsestimater endrer seg i løpet av en iterasjon. Hva blir da den totale kjøretiden, i beste tilfelle, om du antar at det finnes stier fra startnoden til alle andre? Forklar kort.
- 11 Hva er det minste og største antallet elementer i en binærhaug med høyde h ?
- 12 Hva sier heltallsteoremet (*the integrality theorem*)? Forklar kort med egne ord.
- 13 Hva er restkapasitet (*residual capacity*) og hvordan regner man det ut? Forklar kort.
- 14 Din venn Smartnes mener at *grafisomorfi* er minst like vanskelig som *faktorisering*. For å etablere dette tenker hun å vise at en løsning på det ene problemet kan, med litt ekstra beregning, brukes til å løse det andre. Forklar hvilket problem sin løsning som i så fall må kunne brukes på det andre problemet, og hvorfor det fører til den ønskede konklusjonen.

Algoritme 1 Lurviks versjon av *randomized select*

```
RANDOMIZED-SELECT( $A, p, r, i$ )
1  if  $r \leq p$ 
2    return  $A[p]$ 
3   $q = \text{RANDOMIZED-PARTITION}(A, p, r)$ 
4   $k = q - p + 1$ 
5  if  $i == k$ 
6    return  $A[q]$ 
7  elseif  $i < k$ 
8    RANDOMIZED-SELECT( $A, p, q - 1, i$ )
9    RANDOMIZED-SELECT( $A, q + 1, r, i - k$ )
```

- 15 Din venn Lurvik har prøvd å skrive ned pseudokode for *randomized select* etter hukommelsen. Resultatet (algoritme 1) er ikke helt rett. Beskriv hva som må fikses for at algoritmen skal bli korrekt.
- 16 Hvilket problem løser algoritme 1, dersom den kalles som følger, der $A[1 : n]$ er en tabell med tall?

```
RANDOMIZED-SELECT( $A, 1, n, 0$ )
```

Forklar kort.

- 17 Din venn Gløgsund har laget to versjoner av Ford–Fulkerson-metoden der hun bruker henholdsvis DIJKSTRA og TRANSITIVE-CLOSURE til å finne forøkende stier. Hvilke av disse to metodene vil garantert finne maks-flyt i polynomisk tid? Forklar kort.
- Anta at $w(u, v) = 1$ for alle kanter (u, v) i restnettet, og at Gløgsund vedlikeholder en Π -tabell med forgjengere i TRANSITIVE-CLOSURE for å finne de faktiske stiene.
- 18 Vi sier at en kvinne og en mann er *ment for hverandre* om de ender opp sammen i alle mulige stabile matchinger. Konstruer en effektiv algoritme som bestemmer om en kvinne og en mann er ment for hverandre.
- 19 Hvordan kan vi løse delsumproblemet (*the subset-sum problem*) i polynomisk tid hvis den ønskede delsummen (*target*) er oppgitt i entallssystemet?
- I entallssystemet representeres k som en streng $111 \dots 1$ av lengde k .
- 20 Et kongerike består av flere regioner. Kongen ønsker å bygge en mur som går rundt én eller flere av regionene, inkludert den som inneholder det kongelige slott. Byggekostnadene varierer med terrenget, og kongen har bedt deg om å finne den billigste løsningen. Hvordan vil du gå frem?

Du kan anta at muren følger regiongrenser.