

TDT4120 Algoritmer og datastrukturer

Eksamen, 12. desember 2023, 15:00–19:00

Faglig kontakt Magnus Lie Hetland

Hjelpemiddelkode E

Oppgaver

1 I de følgende deloppgavene er det meningen at du skal svare *svært kort*.

- 5% a) Hva er kjøretiden til INSERTION-SORT i beste tilfelle?
- 5% b) Hva er den største fordelene med en tabell (*array*) fremfor en lenket liste?
- 5% c) I COUNTING-SORT(A, n, k) er A en tabell (*array*) med n verdier. Hva er k ?
- 5% d) Hva er topologisk sortering?
- 5% e) I en maks-haug (*max-heap*) ligger verdien x i en foreldrenode, mens verdiene y og z ligger i henholdsvis venstre og høyre barnenode. Hvilke krav stilles til forholdet mellom verdiene?

Her er det altså snakk om *verdier*, ikke f.eks. indekser.

2 I de følgende deloppgavene er det oppgitt informasjon om funksjonene $f(n)$ og $g(n)$. I hvert tilfelle, uttrykk $f(n) + g(n)$ med asymptotisk notasjon.

Under eksamen ble følgende oppgitt: Med formuleringen «i hvert tilfelle» menes «i hver deloppgave». Hver deloppgave skal besvares med ett uttrykk.

- 5% a) $f(n) = O(n^2)$, $f(n) = \Omega(n)$, $g(n) = O(n^2)$, $g(n) = \Omega(n^2)$
- 5% b) $f(n) = \Omega(n^2)$, $f(n) = \omega(n)$, $g(n) = O(n^2)$, $g(n) = o(n^3)$

3 Løs følgende rekurrenser. Oppgi svaret i Θ -notasjon.

- 5% a) $T(n) = T(n-1) + n^2 - (n-1)^2$
- 5% b) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n} \lg^2 n$

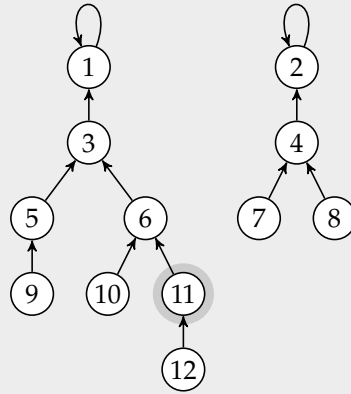
5% **4** Du har oppgitt følgende frekvenser for alfabetet a, \dots, h :

a:1 b:1 c:2 d:3 e:5 f:8 g:13 h:21

I en Huffman-kode for disse tegnene, hva er antall siffer for tegnet e?

Her er vi altså ute etter antall binære siffer som trengs for å kode én e med Huffman-koden, ikke det totale antall siffer som brukes på alle e-ene i teksten.

Figur 1



- 5% **5** I figur 1 ser du en disjunkt-mengde-skog (*disjoint-set forest*). Vi kan representere foreldrepekerne med en tabell A , der $A[v] = v.p$:

$A = \langle 1, 2, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 11 \rangle$

Utfør `FIND-SET(11)` og oppdater A . Hvordan ser A ut etterpå?

Svar ved å liste opp tallene i A . Du trenger ikke skrive $A = \langle \dots \rangle$.

- 5% **6** Hvilke forøkende stier vil Edmonds-Karp finne i flytnettets i figur 2?

Det er altså meningen at du skal utføre Edmonds-Karp på flytnettets, men *uten* initialiseringen $(u, v).f = 0$. Oppgi stiene som sekvenser av noder. Skriv én sti per linje, i den rekkefølgen de finnes. For eksempel:

1, 2, 3, 4, 5

7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

4, 5, 6, 7, 8, 9

(Dette er kun et eksempel på formatet, *ikke* et faktisk gyldig sett med stier.)

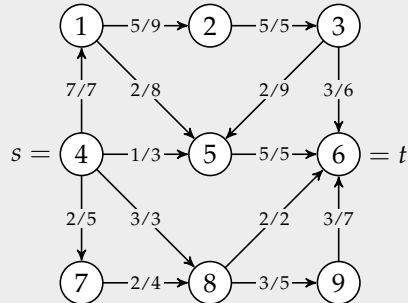
- 5% **7** Hvis det er uavgjort mellom noen kandidater i noen av rangeringene i stabil matching (*the stable-marriage problem*), kan vi fortsatt garantert finne en stabil matching? Forklar kort.

- 8** Betrakt algoritmen `UNTITLED` (algoritme 1), der $A[1:n]$ er en heltallstabell og algoritmen startes med kallet `UNTITLED(A, 1, n, k)`.

- 5% a) Hva gjør algoritmen?

Her er vi ute etter resultatet av å kjøre algoritmen, eller hvilket problem den løser, ikke hvordan den oppfører seg, trinn for trinn.

Figur 2



Algoritme 1

```
UNTITLED(A, p, r, k)
1 if p < r
2   q = RANDOMIZED-PARTITION(A, p, r)
3   UNTITLED(A, p, q - 1, k)
4   if q < k
5     UNTITLED(A, q + 1, r, k)
```

5% b) Hva er den forventede kjøretiden, som funksjon av n og k ? Oppgi svaret i Θ -notasjon.

Som en forenkling, kan du anta at q alltid havner midt mellom p og r .

9 Du skal lage en spilleliste som er nøyaktig t sekunder lang. Du har n sanger å velge mellom. Du kan anta at alle sangene varer et helt antall sekunder.

5% a) Hvordan kan du vise at dette er et vanskelig problem?

5% b) Hvordan kan du løse problemet?

5% 10 Din venn Smartnes leter etter stier i en sammenhengende vektet urettet graf, fra en startnode s til alle andre. Hvis han finner de korteste stiene, vil summen av alle sti-lengdene bli minst mulig, men delene av stiene der de *overlapper* vil da telles med flere ganger. Han vil heller finne et sett med stier som minimierer en tilsvarende sum, der de overlappende delene telles bare én gang. Hvordan kan han gjøre det? Forklar kort.

5% 11 Din venn Klokland er ansvarlig for en konsertserie, men på grunn av budsjett-kutt må hun nøye seg med én scene. Flere av konsertene kolliderer tidsmessig, og noen må derfor avlyses. Klokland ønsker å avlyse så få som mulig.

Det eneste hun har tatt vare på av informasjon er starttidspunktene for alle konsertene, samt en urettet graf med konserter som noder, og kanter mellom

dem som kolliderer. Hun ønsker å fjerne så få noder som mulig, slik at alle kantene forsvinner.

Hun blir litt svett idet hun innser at dette er optimeringsversjonen av VERTEX-COVER, men håper kanskje du har noen gode ideer.

Konstruer og beskriv en algoritme som løser problemet generelt.

5% **12** Konstruer og beskriv en algoritme som avgjør om en rettet graf har en odde sykkel, altså en sykkel med et antall kanter som er et oddetall.

Her får du full uttelling med kjøretid $O(V^3)$.

Hint 1: Det kan være nyttig å se på *stier* som en del av løsningen.

Hint 2: Du trenger ikke begrense deg til *enkle (simple)* stier og sykler.

Hint 3: Finnes en odde sti fra i til j ? Hva med en der antall kanter er et partall?