

TDT4120 Algoritmer og datastrukturer

Eksamen, 3. august 2026, 09:00–13:00

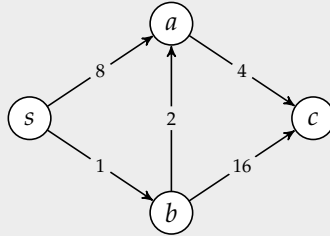
Faglig kontakt Magnus Lie Hetland

Hjelpemiddelkode E

Oppgaver

- 5 % **1** Hva er kjøretiden til BFS? Oppgi svaret i O-notasjon.
Anta at grafen er representert med nabolister.
- 5 % **2** Hva er kjøretiden til INSERTION-SORT?
Oppgi både øvre og nedre grense, om mulig kombinert vha. Θ -notasjon.
- 5 % **3** Hva kreves for at FLOYD-WARSHALL skal gi riktig svar, hvis noen av kantvektene er negative?
- 5 % **4** Om du utfører QUICKSORT (som beskrevet i læreboka) på en tabell der alle n elementer er like, hva blir kjøretiden, i Θ -notasjon? Hjelper det å bruke den randomiserte utgaven, RANDOMIZED-QUICKSORT? Forklar kort.
- 5 % **5** Stemmer følgende påstand?
 $2^{n+1} = O(2^n)$
Forklar kort.
- 5 % **6** Stemmer følgende påstand?
 $4^n = O(2^n)$
Forklar kort.
- 5 % **7** Du skal utføre RADIX-SORT på tabellen $A = \langle 011, 110, 001, 100 \rangle$.
Hva er A etter *andre* runde med sortering?
Her består altså hvert tall av tre siffer. For eksempel har 011 sifrene 0, 1 og 1.
- 5 % **8** Om du utfører DIJKSTRA på grafen i figur 1, med startnode s , hvilke ulike verdier får $c.d$ under utførelsen?

Figur 1



Her skal du altså liste opp alle verdiene feltet $c.d$ får, i rekkefølge, etter hvert som algoritmen utføres. Oppgi hvilken verdi feltet initialiseres til, og verdien det får hver gang det endres etter det.

- 5 % **9** I en instans av det kontinuerlige ryggsekkproblemet (*fractional knapsack*) har du tre gjenstander med følgende verdier $v[1:3]$ og vekter $w[1:3]$:

$$v = \langle 32, 30, 45 \rangle$$

$$w = \langle 8, 12, 15 \rangle$$

Kapasiteten W er 20. Hva blir den optimale totalverdien? Forklar kort.

- 5 % **10** Du har løst stavkappingsproblemet (*rod cutting*), og ender med følgende:

$$r[0:8] = \langle 0, 3, 7, 12, 15, 19, 24, 27, 31 \rangle$$

$$s[1:8] = \langle 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2 \rangle$$

Her er $r[j]$ den optimale prisen for en stav av lengde j og $s[j]$ er lengden til den første delen av den optimale løsningen (når $j > 0$).

Hva blir lengdene til de ulike bitene i en optimal løsning for en stav med total lengde 8 og hva blir den totale verdien?

- 5 % **11** Gløgsund, Klokland og Flinckenhagen diskuterer flyt. De er enige om at i et flytnett (*flow network*) med heltallskapasiteter så vil den største mulige flytverdien være et heltall. Men:

- Gløgsund mener også at flyten i alle kantene da også *må være heltall*.
- Klokland mener at det stemmer *for løsninger funnet med Ford–Fulkerson-metoden*, men at det kan finnes andre optimale løsninger der noen av kantene *ikke* har heltallsflyt.
- Flinckenhagen mener også at det kan finnes optimale løsninger der noen kanter ikke har heltallsflyt, men hun mener også at Ford–Fulkerson-metoden *også kan ende opp med noen av disse*.

Hvem av dem har rett? Gi en kort, intuitiv forklaring.

Forklaringen trenger ikke være et bevis eller fullstendig argument.

- 5% **12** Hva er forskjellen mellom NP-hardhet og NP-kompletthet? Forklar kort.
Du kan anta at det her kun er snakk om beslutningsproblemer.
- 5% **13** Løs rekurrensen $T(n) = 3T(n/2) + n$. Oppgi svaret i Θ -notasjon.
Hint: $\log_2 3 = 1.5496 \dots$
- 5% **14** Løs rekurrensen $T(n) = T(n/5) + T(4n/5) + n$.
Bruk et rekursjonstre og gi en kort, overordnet forklaring på hvordan treet gir både en øvre og nedre grense. Oppgi svaret i Θ -notasjon.
Poenget er å bruke *tankegangen* bak rekursjonstrær. Du trenger ikke faktisk tegne opp eller oppgi selve treet.
- 5% **15** Din venn Gløgsund påstår at hun har konstruert en metode som tar inn en min-haug (*min-heap*) av lengde n og gjør den om til en maks-haug (*max-heap*) med de samme elementene, med kjøretid $O(n)$. Kan hun ha rett? Forklar kort.
- 5% **16** Visdal vil finne spenntrær i en sammenhengende, urettet graf med positive kantvekter. Han prøver å implementere Prims algoritme (MST-PRIM), men der algoritmen sammenligner eller tilordner $w(u, v)$, skriver han $u.key + w(u, v)$ i stedet. Beskriv hva denne modifiserte algoritmen produserer. Utgjør mengden av kanter på formen $(v, v.\pi)$ fortsatt et spenntrær? Er det i så fall alltid et minimalt spenntrær? Forklar kort.
- 5% **17** Lurvik har tegnet en rettet, asyklisk graf (*directed acyclic graph*). Han påstår (a) at den har minst to ulike topologiske sorteringer og (b) at den inneholder en rettet hamiltonsti, altså en sti som besøker hver node nøyaktig én gang. Tror du han har rett? Forklar kort.
- 5% **18** Flinckenhagen vil leie et sett med utsalgsboder på Martnan.* Bodene hun kan velge mellom ligger i en ring rundt torget, noen med bedre plassering enn andre; bod i gir en forventet profitt $p_i \geq 0$, for $i = 1 \dots n$. Reglene forbyr henne å leie to boder ved siden av hverandre. Hun vil velge et lovlig sett med boder som maksimerer den totale forventede profitten. Beskriv en effektiv algoritme for problemet. Hva blir kjøretiden? Forklar.
Merk: Bod 1 og n ligger også ved siden av hverandre.
- 5% **19** I en m meter lang tunnel finnes det n monteringspunkter, $x_1, x_2, \dots, x_n$ meter fra inngangen. Du skal velge ut k av disse, der det skal monteres antenner. For å minimere interferens, skal den *minste* avstanden mellom to antenner være så stor som mulig. Beskriv en algoritme for problemet med kjøretid $\Theta(n \lg m)$.

* Martnan er et årlig marked på torget i Trondheim.

Hint: Betrakt problemet der «så stor som mulig» erstattes med «minst d meter».

Du kan anta at $x_1, \dots, x_n$ er oppgitt i sortert rekkefølge og at x_i og m er positive heltall. Det er mulig å bruke dynamisk programmering for å få en kjøretid på $\Theta(nk)$, men det er *ikke* dette vi er ute etter.

- 5% **20** Du får oppgitt en sammenhengende urettet graf G og vil finne et spennetre for G med så få løvnoder som mulig. Forklar enten hvordan dette kan gjøres effektivt eller hvorfor det trolig *ikke* kan gjøres effektivt.